SISTEM PERSAMAAN LINEAR (SPL) UNTUK PENYELESAIAN *MAGIC SQUARE*

Skripsi

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Meraih Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Jurusan Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Alauddin Makassar

Oleh:

SRI HIDAYATI
NIM. 60600111062

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI ALAUDDIN
MAKASSAR
2015

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Dengan penuh kesadaran, penyusun yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi ini benar adalah hasil karya penyusun sendiri. Jika di kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan duplikat, tiruan, plagiat, atau dibuat oleh orang lain, sebagian atau seluruhnya, maka skripsi dan gelar yang di peroleh karenanya batal demi hukum.

Makassar,   September 2015

Penyusun,

Sri Hidayati
Nim, 60600111062

PERSEMBAHAN

AKU PERSEMBAHKAN KARYA INI KEPADA-MU YA ALLAH

WAKTU YANG SUDAH KUJALANI DENGAN JALAN HIDUP YANG SUDAH MENJADI TAKDIRKU, SEDIH, BAHAGIA DAN BERTEMU ORANG-ORANG YANG MEMEBERIKU SEJUTA PENAGALAMAN BAGIKU, YANG TELAH MEMBERI WARNA-WARNI KEHIDUPANKU.

KUBERSUJUD DIHADAPAN-MU,

ENGKAU BERIKAN AKU KESEMPATAN UNTUK BISA

SAMPAI

DIPENGHUJUNG AWAL PERJUANGANKU"

MOTTO

" PENDIDIKAN ADALAH SENJATA PALING AMPUH YANG BISA KAMU GUNAKAN UNTUK MERUBAH DUNIA"

"SEMANGAT ADALAH SALAH SATU KUNCI KEBERHASILAN MERAIH CITA-CITA"

KATA PENGANTAR

Assalamu' alaikum Wr.Wb.

Puji syukur kehadirat Allah swt, karena atas rahmat dan hidayah-Nyalah sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian dan penyusunan skripsi ini dengan baik.

Skripsi dengan judul: **"Sistem Persamaan Linear (SPL) untuk penyelesaian *Magic Square*"** yang merupakan tugas akhir dalam menyelesaikan studi dan sebagai salah satu syarat yang harus dipenuhi untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) pada program studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar.

Keberhasilan dalam penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, arahan, bimbingan, dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya khususnya kepada orang tua tersayang ayahanda **H.Mansyur Mahmud** dan ibunda **Hj.Darniati.,S.Pd.,M.A** yang telah mempertaruhkan seluruh hidupnya untuk kesuksesan anaknya, yang telah melahirkan, membesarkan, mendidik dengan sepenuh hati dalam buaian kasih sayang dan tanpa lelah mencari nafkah untuk penulis dan saudara-saudaraku sampai saat ini.

Dalam kesempatan ini pula, penulis mengucapkan terimah kasih banyak yang sedalam-dalamya, kepada:

1. Rektor Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar
2. Bapak Prof. Dr. H. Arifuddin.,M.Ag selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Alauddin Makassar

3. Bapak Irwan.S.Si., M.Si, selaku ketua jurusan Matematika dan Ibu Wahidah Alwi.,S.Si.,M.Si selaku sekretaris jurusan Matematika UIN Alauddin Makassar
4. Pembimbing I, Ibu Try Azisah Nurman, S.Pd., M.Pd, dan Ibu Wahidah Alwi, S.Si., M.Si, selaku pembimbing II yang dengan penuh kesabaran telah meluangkan waktu dan pikirannya untuk memberikan bimbingan, arahan, dan petunjuk mulai dari membuat proposal hingga rampungnya skripsi ini
5. Segenap dosen jurusan Matematika dan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Alauddin Makassar yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk mengikuti pendidikan, memberikan ilmu pengetahuan, dan pelayanan yang layak selama penulis melakukan studi
6. Seluruh keluarga besar penulis, terkhusus dan teristimewa untuk Kakek nenekku Bajeng, Mahmud, dan Hj.Madinah yang telah memberikan dukungan yang tiada hentinya kepada cucunya dan semua keluarga penulis mulai dari keluarga Bajeng dan Mahmud terimah kasih telah mendoakanku sampai saat ini
7. Bapak Ridzan Djafri.S.Ag.,M.Si yang telah banyak membantu dalam menyelesaikan skripsi penulis tanpa ada kata lelah meluangkan waktunya untuk membimbing penulis di Pondok Pesantren Ash-Shalihin Romang Polong Kab.Gowa
8. Seluruh teman terdekat penulis, Andi Redha Saputra, Ridhasari Idris, Nur Eka Agustianti, Miftahurrahmah, Junarsih, Herianti, Wanti Septiawati, Nur Hikmawati, Rini Wahyuni, Nursyamsinar, Kakanda Aldi yang telah menemaniku dan memberi semangat do’a dan materil selama beberapa tahun ini
9. Teman-teman dan sahabat-sahabat L1M1T 2011 terkhusus untuk L1M1T ‘B’ yang telah menjadi teman terbaik dan sekaligus keluarga baru bagi penulis, HMJ Matematika, senior maupun junior Matematika UIN Alauddin Makassar yang selama ini memberikan banyak motivasi, dan bantuan bagi penulis.

10. Sahabat sekaligus keluarga baru KKN Reguler Angk ke-50 UIN Alauddin Makassar, Desa Borikamase Kec.Maros telah menjadi bagian hidup penulis
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah membantu penulis dengan ikhlas dalam banyak hal yang berhubungan dengan penyelesaian studi penulis.

Semoga skripsi yang penulis persembahkan ini dapat bermanfaat. Akhirnya, dengan segala kerendahan hati, penulis memohon maaf yang sebesar-besarnya atas segala kekurangan dan keterbatasan dalam penulisan skripsi ini. Saran dan kritik yang membangun tentunya sangat dibutuhkan untuk penyempurnaan skripsi ini. Wassalam.

Samata, September 2015
Penulis

Sri Hidayati
60600111062

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

a_{11} - a_{49}	:	Peubah
m	:	Jumlah baris, kolom, dan diagonal
n	:	Banyaknya ordo
$\sum$	:	Sigma
j	:	Kolom
i	:	Baris
+	:	Penjumlahan
$\times$	:	Perkalian
$\div$	:	Pembagian
-	:	Pengurangan

ABSTRAK

Nama : **Sri Hidayati**

Nim : **60600111062**

Judul : **Sistem Persamaa Linear (SPL) untuk penyelesaian *Magic Suare***

Skripsi ini membahas tentang cara mendapatkan bilangan *Magic* dengan menggunakan solusi sistem persamaan linear (SPL). Pada dasarnya, *Magic Square* ini adalah permainan sudoku yang bisa dilakukan dalam ilmu matematika yang khususnya sistem persamaan linear (SPL) untuk mendapatkan bilangan *Magic* tersebut. Tujuan dari penelitian ini, untuk mendapatkan penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan solusi sistem persamaan linear (SPL) sampai dengan berordo 7×7 dan menggunakan bantuan software Mathematica 8.0 yaitu dengan melakukan beberapa langkah untuk menghasilkan hasil dari sistem persamaan linear (SPL) untuk bilangan *Magic*. Kemudian didapatkan nilai dari jumlah bilangan *Magicnya* digunakan rumus $m = \frac{1}{2}n(n^2 + 1)$, oleh karena itu jumlah baris, kolom, dan diagonal pada ordo 7×7 adalah berjumlah 175. Adapun salah satu bilangan *Magic Square* ordo 7×7 adalah :

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Kata Kunci : Sistem persamaan linear (SPL), Matriks, Operasi baris elementer (OBE), *Magic Square*, Mathematica 8.0.

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari, baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika sendiri banyak membantu dan mempermudah untuk menyelesaikan permasalahan dalam kajian ilmu yang lainnya, seperti halnya pada ilmu kedokteran, ilmu hukum, ilmu perbintangan, ilmu agama, dan masih banyak ilmu-ilmu yang lainnya. Bahkan matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama yang kebenarannya dapat dilihat dalam al-Qur'an. Oleh karena itu, hubungan antara matematika dengan ilmu agama memang sangat erat, sama seperti hubungan matematika dengan ilmu-ilmu yang lain.[1]

Suatu ilmu dapat berkembang karena berbaur dengan ilmu-ilmu yang lain seperti ilmu perhitungan dengan ilmu agama. Kitab muliah al-Qur'an mengajarkan pembaca "Tuhan menciptakan sesuatu dengan hitungan teliti" sebagaimana firman Allah swt yang tercantum dalam QS Al-anbiya/21 ayat 47 yang berbunyi

وَنَضَعُ ٱلْمَوَٰزِينَ ٱلْقِسْطَ لِيَوْمِ ٱلْقِيَٰمَةِ فَلَا تُظْلَمُ نَفْسٌ شَيْـًٔا ۖ وَإِن كَانَ مِثْقَالَ حَبَّةٍ مِّنْ خَرْدَلٍ أَتَيْنَا بِهَا ۗ
وَكَفَىٰ بِنَا حَٰسِبِينَ ﴿٤٧﴾

Terjemahnya :

> "Dan Kami akan memasang timbangan yang tepat pada hari Kiamat, maka tidak seorang pun dirugikan walau sedikit, sekalipun hanya seberat biji sawi,

---

[1] Rosy Aliviana,dkk. *Analisis Matematika Terhadap Azimat Numerik.* (Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim) Jurnal CAUCHY – ISSN: 2086-0382 vol. 2, 2012, h.105.

pasti Kami mendatangkannya (pahala). Dan cukuplah Kami yang menghisabnya (perhitungan)”. [2]

Dari potongan ayat di atas menjelaskan bahwa, ketika Kami memasang timbangan yang adil pada hari Kiamat bahwa setiap amal yang lahir maupun yang batin, kelak akan ditimbang atau mempunyai tolok ukur masing-masing, sehingga semua amal benar-benar menghasilkan ketepatan timbangan. Dan untuk menjadi tolok ukur kebaikan dan keburukan amal serta kualitasnya maka di sana tiadalah dirugikan seseorang walau sedikit pun dengan penambahan keburukannya atau pengurangan kebaikannya bahwa amal kebaikan dan kejahatan masing-masing orang ditimbang, dan mana yang berat itulah yang menentukan kebahagiaan dan kesengsaraan manusia. Dan walau amal kebaikan hanya seberat biji sawi pasti Kami mendatangkan pahala-nya bahwa 1 kg biji sawi terdiri atas 913.000 butir dengan demikian berat satu biji sawi hanya sekitar satu persatu seribu gram, atau ± 1 mg, biji sawi merupakan biji-bijian teringan yang diketahui umat manusia sampai sekarang kemudian Kami akan mendatangkan pahala-nya. Dan cukuplah Kami sebagai pembuat perhitungan.[3]

Terkait dengan hal tersebut yang menyebutkan bahwa Allah swt menghitung segala hal yang menyangkut perbuatan yang dilakukan hamba-hambanya baik itu perbuatan sekecil apapun itu mendapatkan balasan dari Allah swt. Seperti halnya dalam persoalan matematika misalnya dalam menyelesaikan suatu

---

[2] Departemen Agama RI, *Al-Qur’an dan terjemahnya*, (Bandung : PT.Sygma Examedia Arkanlema, 2009), h.326.

[3] HM.Quraish Shihab, *Tafsir Al-Mishbah (Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qu’an)*, (Jakarta : Lentera Hati, 2002), h.460-462.

permasalahan sistem persamaan linear (SPL), membutuhkan perhitungan yang teliti karena nilainya berbeda sedikit saja akan mempengaruhi hasil yang diperoleh. Dalam suatu permasalahan yang akan diselesaikan dalam operasi matematika yaitu operasi perkalian, penjumlahan, dan pengurangan.

Ilmu pengetahuan dan teknologi serta seni (IPTEKS) semakin meningkat seiring dengan perkembangan zaman. Hasil dari peningkatan kemajuan IPTEKS pada saat ini, maka telah menjadi bagian yang tidak dapat dipisahkan dengan kebutuhan manusia itu sendiri. Agar ilmu pengetahuan terus berkembang dan maju maka perlu diadakan penelitian-penelitian, baik penelitian yang bertujuan menemukan dan menyelesaikan masalah-masalah baru, mengembangkan pengetahuan yang ada maupun menguji kebenaran suatu pengetahuan.

Ilmu perhitungan atau dengan kata lain matematika terapan memiliki beberapa cabang ilmu, antara lain Aljabar Linear, Aljabar Linear Elementer, dan Aljabar Linear Dasar. Aljabar Linear merupakan cabang ilmu di dalam matematika yang mencakup banyak hal, salah satu antara lain adalah Sistem Persamaan Linear (SPL), Persaman kuadrat, dan Persamaan garis.

Masalah yang dapat diselesaikan dengan teknik aljabar kebanyakan berupa himpunan persamaan dengan beberapa variabel dari sebuah persamaan dengan satu variabel. Sebuah himpunan persamaan dengan variabel umum disebut sistem persamaan. Persamaan linear adalah suatu persamaan yang memiliki variabel berderajat (berpangkat) satu. Sistem Persamaan Linear (SPL) adalah suatu sistem yang terdiri atas dua atau lebih persamaan linear. Sistem Persamaan Linear (SPL) ini digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear berarti mencari himpunan penyelesaian dan semua penyelesaian sistem. Karena itu digunakan dalam mencari solusi di *Magic Square*. Sebagai contoh penerapan Sistem Persamaan Linear (SPL) dalam aljabar adalah pada matriks.[4]

Matriks adalah susunan bilangan yang diatur secara baris, dan kolom berbentuk persegi panjang di dalam tanda kurung. Suatu matriks dinotasikan dengan huruf kapital. Sebuah matriks mempunyai ukuran yang disebut dengan ordo. Jenis-jenis matriks ditentukan oleh ordo matriks dan elemen-elemennya.[5]

Bentuk matriks hampir serupa dengan bentuk umum *Magic Square*. *Magic Square* adalah susunan bilangan-bilangan asli dalam bentuk persegi yang terdiri dari baris dan kolom, sedemikian rupa sehingga jumlah semua bilangan-bilangan pada setiap baris, setiap kolom, dan setiap diagonal semuanya sama. Jumlah yang sama dari semua bilangan pada tiap baris, tiap kolom, dan tiap diagonal utama disebut konstanta ajaib dari *Magic Square*.[6]

Konsep *Magic Square* ini dapat dilihat dari sisi matematika. Secara matematika salah satu jenis *azimat* numerik yang berbentuk kotak merupakan *azimat* yang terdiri dari angka-angka atau simbol bilangan yang menggunakan bahasa Arab, dan tidak memilki khasiat atau kekuatan tertentu, melainkan pengembangan dari salah satu konsep matematika yaitu *Magic Square*. Selain itu, jika dilihat dari segi

---

[4] Rina Candra Noor Santi, *Implementasi Sistem Persamaan Linier menggunakan Metode Aturan Cramer*, Vol 17, no.1, Januari 2012, h.34.

[5] Heri Purwanto,dkk, *Matematika Diskrit*, (Jakarta : PT.Ercontara Rajawali, 2006), h.49.

[6] Mahmud, *Aljabar Linier Elementer*, (Bandung, Sekolah Tinggi Teknolgi Telkom Press, 2002), h.1.

penulisan, tidak semua penulisan *azimat* tersebut benar. Terbukti pada saat perhitungan, terdapat beberapa *azimat* yang kurang tepat dalam segi penulisan. Kasus seperti ini dimungkinkan pada saat penulis buku tersebut menyalin dari buku-buku atau kitab-kitab sebelumnya terdapat suatu kemiripan angka (Arab) dan tidak dapat dilihat jelas.[7]

Sebagaimana firman Allah swt yang tercantum dalam QS Yunus/10 ayat 106 yang berbunyi :

وَلَا تَدۡعُ مِن دُونِ ٱللَّهِ مَا لَا يَنفَعُكَ وَلَا يَضُرُّكَۖ فَإِن فَعَلۡتَ فَإِنَّكَ إِذٗا مِّنَ ٱلظَّٰلِمِينَ ١٠٦

Terjemahnya :

> "Dan janganlah kamu menyembah apa-apa yang tidak memeberi manfaat dan tidak (pula) memberi *mudharat* kepadamu selain Allah swt; sebab jika kamu berbuat (yang demikian), itu. Maka sesungguhnya kamu kalau begitu termasuk orang-orang *zalim*".[8]

Dari potongan ayat di atas menjelaskan bahwa ayat ini mengukuhkan larangan itu sambil menjelaskan mengapa sikap persekutukan Allah swt merupakan hal yang sangat tercela. Hal ini mengisyaratkan bahwa beribadah kepada sesuatu haruslah terhadap sesuatu yang memiliki rasa dan akal. Sedang yang disembah oleh kaum musyrikin "*apa*" yakni sesuatu yang tidak memiliki akal dan rasa. Karena itu, di samping tidak wajar disembah, juga pasti ia tidak akan mampu memberi manfaat dan mencengah *mudharat*, sehingga segala bentuk ibadah dan pengabdian kepada "apa pun" pasti tidak akan berguna. *Dhar/kemudharatan* adalah sesuatu yang

---

[7] Rosy Aliviana,dkk, *Analisis Matematik Terhadap Azimat Numerik.* (Malang: UIN Maulana Malik Ibrahin) Jurnal CAUCHY – ISSN: 2086-0382 vol. 2, 2012, hal. 113.

[8] Departemen Agama RI, *Al-Qur'an dan terjemahnya*, (Bandung : PT.Sygma Examedia Arkanlema, 2009), h.220.

menyakitkan atau menyedihkan atau mengantar kepada salah satu di antara kedua hal tersebut. Demikian keadaan siapa pun yang menyembah Allah swt. Adapun yang menyembah Allah swt maka dia yakin bahwa Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu, kehendak-Nya tidak akan di tampik.

Seperti halnya dalam persoalan matematika misalnya dalam *Magic Square* ini bermacam-macam bentuknya ada tulisan yang menggunakan simbol-simbol dalam bahasa Arab, baik berupa huruf, angka,dan gambar. Oleh karena itu harus teliti dalam menetukan penulisan didalam bentuk *Magic Square* karena masih banyak orang yang mengangapnya jimat (azimat) untuk melakukan kesyirikan misalnya untuk membantu manusia mengatasi berbagai permasalahan hidup karena dalam Agama sangat dibenci perbuatan persekutuan karena sama halnya dengan menyembah Allah swt.

Alasan mengambil Sistem Persamaan Linear (SPL) karena dalam menentukan bilangan *Magic* digunakan operasi baris elementer, dimana operasi baris elemeter tersebut sangat berkaitan dengan sistem persamaan linear (SPL). Dan alasan penulis memilih judul penelitian ini karena berdasarkan pada hasil penelitiaan sebelumnya yang dilakukan oleh Riswanto Fernandus Siringo-Ringo yang juga membahas penyelesaian *Magic Square* sebagai permasalahan Sistem Persamaan Linear (SPL) ini hanya menggunakan ordo 1×1 sampai dengan ordo 5×5. Maka penulis ingin melanjutkan penelitian Riswanto Fernandus Siringo-Ringo sampai ordo 7×7, hasil penelitian sebelumnya menggunakan software Mathematica 7.0. Karena saran sebelumnya mengatakan *Magic Square* belum ditentukan solusi umumnya atau algoritma umum untuk menyelesaikan. Maka penulis tertarik untuk mengkaji cara penyelesaian masalah *Magic Square* menggunakan Aljabar Linear terkhusus pada Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan menggunakan bantuan software Mathematica 8.0. Hal ini dikarenakan cara ini lebih baik dan efisien untuk mendapatkan hasil yang akurat dan *mutakhir*. Berdasarkan uraian dari latar belakang diatas, maka penulis tertarik mengambil judul tentang **"Sistem Persamaan linear (SPL) untuk penyelesaian *Magic Square*".**

B. Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan solusi umum sistem persamaan linear (SPL) sampai dengan berordo 7×7?
2. Bagaimana solusi pada sistem persamaan linear (SPL) dengan bentuk dari *Magic Square* dalam software Mathematica 8.0 sampai dengan berordo $n \times n$?

C. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penelitian pada penulisan ini adalah sebagai berikut :

1. Untuk mendapatkan penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan solusi sistem persamaan linear (SPL) sampai dengan berordo 7×7.

2. Untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan linear (SPL) dalam penyelesaian *Magic Square* dengan software Mathematica 8.0 sampai dengan berordo $n \times n$.

D. Manfaat Penelitian

Adapun beberapa manfaat yang diharapkan dari penelitian ini, di antaranya adalah :

1. Bagi Penulis

   Untuk membantu penulis memperkuat pemahaman ilmu yang telah diperoleh pada bangku perkuliahan, pada materi matriks dan sistem persamaan linear (SPL) serta pemahaman baru tentang pola *Magic Square*.

2. Bagi pembaca

   Hasil penelitian ini dapat digunakan untuk membandingkan bagi pihak yang ingin mengetahui lebih banyak atau lebih dalam lagi tentang menentukan Sistem Persamaan Linear (SPL) untuk permasalahan *Magic Square*.

3. Bagi pustaka

   Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan pustaka, tambahan sarana pembelajaran dan bahan pengembangan ilmu pengetahuan khususnya ilmu matematika yang berkaitan Sistem Persamaan Linear (SPL) untuk menyelesaiakan permasalahan *Magic Square*.

E. Batasan Masalah

Untuk menghindari pembahasan secara meluas yang terkait dengan materi Aljabar ini, maka penulis akan membatasi masalah pada pembahasan dan pencarian pola untuk *Magic Square* berukuran sampai dengan 7×7 dan pada pembahasan untuk pencarian pola *Magic Square* menggunakan software Mathematica 8.0 berukuran sampai $n \times n$, akan tetapi dalam penelitian ini software Mathematica 8.0 hanya mampu sampai ordo 13×13.

F. Sistematika Penulisan

Agar penulisan tugas akhir ini tersusun secara sistematis, maka penulis memberikan sitematika penulisan sebagai berikut :

BAB I : Pendahuluan

Membahas tentang pendahuluan yang berisi latar belakang masalah, dimana latar belakang masalah ini dikemukakan dengan alasan penulis mengangkat topik ini, rumusan penelitian, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah dan sistematika penulisan adalah sebagai fokus pembahasan penelitian terhadap proposal ini.

BAB II : Tinjauan Pustaka

Teori pendukung yang berisi pokok-pokok tinjauan pustaka yang mendasari dan digunakan dalam penelitian, antara lain yang mencakup tentang Matriks, Operasi Baris Elementer (OBE), Sistem Persamaan Linear (SPL), Solusi Sistem Persamaan Linear (SPL), *Magic Square* dan bilangan *Magic*, Operasi Baris Dasar, serta solusi umum Sistem Persamaan Linear (SPL) terhadap *Magic Square*.

BAB III : Metode Penelitian

Membahas tentang langkah-langkah menemukan solusi umum Sistem Persamaan Linear (SPL) terhadap *Magic Square* dan penelitian yang akan dilakukan oleh penulis yang meliputi jenis penelitian yang digunakan, waktu dan lokasi penelitian,dan serta prosedur penelitian.

BAB IV : Hasil Penelitian dan Pembahasan

Pada bab ini dikemukakan hasil penelitian dalam menentukan bilangan Magic Square dengan penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL), baik secara manual maupun dengan bantuan software Mathematica 8.0.

BAB V : Penutup

Pada bab ini terdiri dari kesimpulan dan saran.

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Matriks

1. Pengertian Matriks

Matriks adalah kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolomnya yang membentuk suatu persegi panjang serta termuat di antara sepanjang tanda kurung. Matriks lazimnya dinotasikan dengan huruf besar yang dicetak tebal (**A, B,** dan seterusnya), dan elemen-elemen dinotasikan dengan huruf kecil yang dicetak miring (a_{ij}, b_{ij}, dan seterusnya) kecuali kalau digunakan bilangan-bilangan khusus.[9]

Matriks merupakan kumpulan elemen yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, yang panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan baris. Ukuran sebuah matriks dinyatakan dalam satuan ordo, yaitu banyaknya baris dan kolom dalam matriks tersebut. Ordo merupakan karakteristik suatu matriks yang menjadi patokan dalam operasi-operasi antar matriks.[10]

Matriks adalah bilangan-bilangan yang disusun dalam bentuk empat persegi panjang. Penyusunan bilangan-bilangan dalam bentuk empat persegi panjang biasanya secara horizontal dan vertikal. Susunan bilangan-bilangan horizontal disebut baris dan susunan bilangan-bilangan vertikal disebut kolom dari matriks.

[9] Abdul Aziz Saefuddin, *Aljabar Matriks*, (Yogyakarta : Graha Ilmu, 2014), h.1.

[10] Novi Rustiana Dewi, dkk, *Kajian Struktur Aljabar Grup pada Himpunan Matriks yang Invertibel*, (Vol 14 No. 1(A) 14101, Januari 2011, h.1.

Setiap bilangan yang disusun disebut elemen matriks. Banyaknya baris dan banyaknya kolom suatu matriks disebut ukuran matriks. Semua bilangan-bilangan yang disusun dalam bentuk empat peresgi panjang dibatasi oleh kurung biasa (   ) atau kurung siku [   ] dan matriks diberi nama huruf besar **A, B, C**,.., dan seterusnya.[11]

Bentuk umum matriks:

$$\boldsymbol{A_{i\times j}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{baris}$$

$$\downarrow$$

kolom

Bilangan a_{mn} disebut elemen-elemen matriks **A** setiap elemen pada matriks bentuk umum diatas berindeks rangkap. Elemen a_{ij}, i merupakan indeks pertama yang menunjukkan baris dan j adalah indeks kedua yang menunjukkan kolom di mana elemen itu berada. Penggunaan tanda kurung dalam penulisan matriks pun berbeda, kurung siku [   ] digunakan untuk mengurungi matriks yang paling sedikit terdiri atas dua baris dan dua kolom, sedangkan kurung biasa (   ) akan digunakan untuk mengurungi matriks yang terdiri dari satu baris.[12]

Matriks sebagai himpunan obyek (bilangan riil atau kompleks, variabel-variabel atau operator-operator dan sebagainya) yang disusun secara persegi panjang (yang terdiri dari baris dan kolom) yang biasanya dibatasi dengan tanda kurung siku

[11] Maslen Sibarani, *Aljabar Linear*. (Jakarta : PT Raja Grafindo Persada, 2014), h. 57.
[12] Abdul Aziz Saefudin, *Aljabar Matriks*, (Yogyakarta : Graha Ilmu, 2014), h.2.

atau biasa. Banyaknya baris dan banyaknya kolom menentukan ukuran (ordo) sebuah matriks. Pandang matriks $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$, $\boldsymbol{i} = 1,2,\ldots,m$ dan $\boldsymbol{j} = 1,2,\ldots,n$.

Karena matriks A tersebut mempunyai m baris dan n kolom, maka $m \times n$ sebagai ukurannya. Dari sini, dua matriks $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ dan $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ dikatakan sama *($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$)* jika dan hanya jika ukuran kedua matriks itu sama dan berlaku $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j.[13]

Contoh 1 :

Matriks berukuran $2 \times 2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Operasi Aljabar pada Matriks

Sebagaimana bilangan, pada matriks pun dapat dilakukan operasi aljabar, tetapi dengan sifat-sifat yang berbeda dari bilangan. Pada matriks,dapat melakukan operasi penjumlahan/pengurangan maupun perkalian, baik itu perkalian antar matriks atau perkalian dengan skalar. Namun dengan syarat-syarat tertentu selanjutnya akan membahas tentang operasi aljabar pada matriks. Perlu dicatat tidak dapat melakukan operasi pembagian matriks dengan matriks.[14]

a. Penjumlahan Matriks

Jumlah dua matriks A dan B yang sejenis adalah sebuah matriks C yang sejenis pula dengan unsur-unsur C_{ij}, di mana terdapat hubungan $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Sifat-sifat Penjumlahan matriks :

1. $A + B = B + A$ Sifat komutatif

[13] Kartono, *Aljabar Linear, Vektor dan Eksplorasinya dengan Maple,* (Yogyakarta : Graha Ilmu, 2005), h.37.

[14] Sumanang Muhtar Gozali, *Aljabar Linear,* (Bandung : UPI Bandung press, 2010), h.9-10.

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ Sifat assosiatif

3. $A + 0 = A$ Sifat terdapat matriks nol.

Contoh 2:

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan B = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Hitunglah $A + B$!

Penyelesaian :

$A + B$ = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

b. Perkalian Matriks

Jika diketahui matriks *A* berordo $i \times j$ dan matriks B berordo $j \times r$, maka hasil kali *AB* didefinisikan sebagai matriks *C* berordo $i \times r$. Sifat-sifat perkalian matriks :

1. $A(B + C) = AB + AC$ Sifat Distribusi

2. $A(BC) = (AB)C$ Sifat asosiatif

3. $AB \neq BA$ Sifat tidak komutatif [15]

Contoh 3 :

Diketahui A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Hitunglah $A\ (B + C)$!

Penyelesaian :

[15] Abdul Aziz Saefudin, *Aljabar Matriks*, (Yogyakarta : Graha Ilmu, 2014), h.4-15.

- Untuk (B + C) $= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

  $= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

- Untuk A (B + C) $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

  $$= \begin{bmatrix} 2(3) + 1(1) & 2(8) + 1(5) \\ 3(3) + 4(1) & 3(8) + 4(5) \\ 1(3) + 3(1) & 1(8) + 3(5) \end{bmatrix}$$

  $$= \begin{bmatrix} 6 + 1 & 16 + 5 \\ 9 + 4 & 24 + 20 \\ 3 + 3 & 8 + 15 \end{bmatrix}$$

  $$= \begin{bmatrix} 7 & 21 \\ 13 & 44 \\ 6 & 23) \end{bmatrix}$$

c. Perkalian Matriks dengan skalar

Skalar adalah suatu bilangan riil (matriks 1x1). Perkalian matriks dengan suatu skalar berarti mengalikan setiap elemen dari matriks dengan skalar tersebut, sebagai berikut:

$$\lambda\, A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\, a_{11} & \lambda\, a_{12} \\ \lambda\, a_{21} & \lambda\, a_{22} \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat perkalian matriks dengan skalar:

1. $k\,(A + B) = kA + kB$ Sifat distribusi kiri
2. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ Sifat distribusi kanan
3. $k_1\,(k_2A) = (k_1k_2)A$ Sifat Asosiatif
4. $0A = 0$ Sifat Identitas Perkalian 0

5. $K0 = 0$ Sifat Identitas Perkalian 0

catatan: 0 ± 0 → 0 = skalar , 0 = matriks nol

Contoh 4 :

Diketahui bilangan konstan k = 2 dikali dengan matriks A dan B seperti berikut :

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$2\,A = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(3) & 2(1) \\ 2(5) & 2(1) \\ 2(1) & 2(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2\,B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Operasi Baris Elementer (OBE)

Ketika dihadapi masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linear terutama yang menggunakan banyak peubah, maka hal pertama yang dapat digunakan untuk menyederhanakan permasalahan adalah dengan mengubah Sistem Persamaan Linear (SPL) yang ada ke dalam bentuk matriks. Suatu persamaan linear biasanya juga tidak didapatkan secara langsung tetapi melalui penyederhanaan dari permasalahan yang terjadi dalam kehidupan sehari – hari. Setelah diubah ke bentuk matriks, maka matriks tersebut diubah ke bentuk matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi untuk mendapatkan penyelesaian dari Sistem Persamaan Linear (SPL). Prosedur untuk mendapatkan matriks eselon baris tereduksi biasa disebut sebagai eliminasi *Gauss–Jordan*. Pada proses eliminasi tersebut operasi-operasi yang digunakan disebut operasi baris elementer.

Dalam operasi baris elementer ini ada beberapa operasi yang dapat digunakan yaitu :

1. Mengalikan suatu baris dengan konstanta tak nol
2. Mempertukarkan dua buah baris
3. Menambahkan kelipatan suatu baris ke baris lainnya.

Dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE), maka matriks eselon baris tereduksi yang didapatkan akan ekuivalen dengan matriks awalnya sehingga penyelesaian untuk matriks eselon baris tereduksi juga merupakan penyelesaian untuk matriks awalnya. Matriks awal yang dimaksud adalah matriks diperbesar.[16]

Contoh 5:

Carilah solusi dari persamaan dibawah ini dengan menggunakan operasi baris elementer (OBE).

$x + y + 2z = 9$
$2x + 4y - 3z = 1$
$3x + 6y - 5z = 0$

[16] Yuliant Sibaroni, *Buku Ajar Aljabar Linear.* (Bandung : Sekolah Tinggi Teknologi Telkom, 2002), h.7-8.

Penyelesaian :

$x + y + 2z = 9$

$2x + 4y - 3z = 1$

$3x + 6y - 5z = 0$

1. Mengubah persamaan tersebut kedalam bentuk matriks yang diperbesar

$x + y + 2z = 9$

$2x + 4y - 3z = 1$

$3x + 6y - 5z = 0$

Menghasilkan bentuk matriks : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

2. Menggunakan Operasi baris elementer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Baris kedua ditambahkan dengan (-2) dikalikan baris pertama untuk dijadikan 0.

Baris ketiga ditambahkan dengan (-3) dikalikan baris pertama untuk dijadikan 0.

Maka hasil yang diperoleh adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Kemudian baris kedua dikalikan dengan $\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Baris ketiga ditambahkan dengan (-3) dikalikan baris kedua untuk dijadikan bentuk matris segitiga atas menghasilkan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Baris ketiga dikalikan dengan 2 untuk membentuk eselon baris .

3. Pada matriks terakhir ini dinamakan matriks berada dalam bentuk eselon baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Dari matriks eselon baris ini dapat ditulis kedalam bentuk persamaan yang bersesuaian dengan matriks tersebut

$x + y + 2z = 9$

$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$

$z = 3$

Sehingga dengan mensubstitusikan :

$z = 3$ kedalam persamaan kedua, diperoleh $y - \frac{7}{2}(3) = -\frac{17}{2} \Rightarrow y = 2$

4. Setelah itu substisikan z dan y kepersamaan pertama, diperoleh :

$x + 2 + 2(3) = 9 \Rightarrow x = 1$

Jadi, solusi dari persamaan diatas adalah $x = 1, y = 2 \; dan \; z = 3$.

Untuk melihat secara lebih mudah definisi dari matriks diperbesar akan ditunjukkan berikut ini :

Diketahui Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan *i* buah persamaan linear dan *j* peubah.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1j}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2j}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{ij}x_n = b_i$$

Sistem persamaan Linear (SPL) diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ dengan:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \end{bmatrix}$$

Matriks yang memiliki berukuran $\mathrm{j} \times 1$ atau $1 \times \mathrm{j}$ biasa disebut vektor. Penulisan vektor sedikit berbeda dengan penulisan matriks, yaitu menggunakan huruf kecil dengan cetak tebal atau digaris atasnya . Jadi matriks $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{B}$ diatas biasa dituliskan sebagai $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{b}$ atau $\overline{\boldsymbol{x}}$ dan $\overline{\boldsymbol{b}}$ sehingga SPL dapat dituliskan sebagai $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\boldsymbol{b}}$. Pada Sistem persamaan linear (SPL) yang berbentuk seperti ini , matriks $\boldsymbol{A}$ juga biasa disebut sebagai matriks konstanta.[17]

Untuk menyelesaikan persamaan linear diatas maka dibuat matriks diperbesar dari $\boldsymbol{A}$ dan $\overline{\boldsymbol{b}}$ yang elemen-elemennya merupakan gabungan elemen matriks $\boldsymbol{A}$ dan vektor $\overline{\boldsymbol{b}}$ yang dinotasikan $[\boldsymbol{A}|\overline{\boldsymbol{b}}\,]$, yaitu bentuk umum matriks yang diperbesar $i \times j$:

$$\boldsymbol{A}|\overline{\boldsymbol{b}} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & b_i \end{array}\right]$$

B. Persamaan Linear dan Sistem Persamaan Linier (SPL)

1. Persamaan Linear

---

[17] Maslen Sibarani,Aljabar Linier, (Jakarta : Rajawali Pers, 2014), h.117.

Persamaan linear adalah suatu persamaan dimana variabel yang terlibat berderajat paling tinggi satu. Persamaan Linear merupakan sebuah garis yang terletak pada bidang xy dapat dinyatakan secara aljabar dalam suatu persamaan berbentuk:

$$a_1x + a_2y = b$$

Dimana a_1, a_2, dan b merupakan konstanta real, a_1 dan a_2 tidak bernilai nol. Persamaan-persamaan ini disebut persamaan linear dengan variabel x dan y. Secara umum persamaan linear *(linear equation)* dengan j variabel $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ sebagai persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

Dimana $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n$ dan b merupakan konstanta real.[18]

Contoh 6:

Bentuk persamaan linear : $2x + 4y = 0$

2. Sistem Persamaan Linear (SPL)

Jika terdapat sejumlah persamaan linear dalam variabel $x_1, x_2,\ \ldots, x_n$ maka dinamakan sistem persamaan linear *(system of linear equations).* Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, bahwa Sistem Persamaan Linear (SPL) adalah suatu sistem yang didalamnya terdiri dari dua atau lebih persamaan linear.[19]

Bentuk umum Sistem Persamaan Linear (SPL) yang terdiri dari i buah persamaan linier dan j buah peubah dapat dituliskan sebagai berikut:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1j}x_n = b_1$$

[18] Howard Anton, Chris Rorres, Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi ed.8, (Jakarta : Erlanggga, 2004), h.2.

[19] Krisnawati, Studi kasus terhadap penyelesaian Sistem Persamaan Linear dengan Eliminasi Gauss, (Vol.10 No.1, Maret 2009), h,1-2.

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \,.\,.\,.\,. + a_{2j}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \,.\,.\,.\,. + a_{ij}x_n = b_i$$

Dalam bentuk Matriks **AX** = **B** dapat dituliskan :

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \end{bmatrix}$$

Dimana $a_1, a_2, .\,.\,.\; a_n$,dan b merupakan bilangan-bilangan real, dan $x_1,\ x_2,\ .\,.\,.\,, x_n$ adalah peubah. a dan b dengan subskrip merupakan konstanta. Jika mempunyai beberapa persamaan linear maka sekumpulan persamaan linear itu disebut Sistem Persamaan Linear. Suatu pasangan beberapa bilangan disebut solusi dari suatu Sistem Persamaan Linear (SPL) jika pasangan tersebut memenuhi kebenaran masing-masing persamaan dari Sistem Persamaan Linear (SPL) tersebut.[20]

Solusi dari persamaan linier $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \,.\,.\,.\,. + a_jx_n = b$ adalah suatu urutan dari n bilangan $s_1,\ s_2,\ .\,.\,.\,, s_n$, sedemikian sehingga persamaan tersebut akan terpenuhi jika menggaitkan $x_1 = s_1\,,\ x_2 = s_2\,,\ .\,.\,.\,, x_n = s_n$. Kumpulan semua solusi dari persamaan itu disebut himpunan solusi atau kadang-kadang disebut sebagai solusi umum dari persamaan tersebut.[21]

Contoh 7 :

Bentuk Sistem Persamaan Linear (SPL) :

---

[20] Steven J. Leon, *Aljabar Linear dan Aplikasinya*, ed. Kelima, terj. Bondan, (Jakarta : Erlangga, 2001), h.1.

[21] Horward Anton, dkk, *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan*, (Jakarta : Erlangga, 2012), h.2-5.

$$
\begin{aligned}
x_1 + \quad 2x_2 + \quad 6x_3 \quad &= \quad 7 \\
2x_1 + \quad 5x_2 - \quad 7x_3 \quad &= \quad 5 \\
4x_1 + \quad 4x_2 - \quad x_3 \quad &= \quad 0
\end{aligned}
$$

Tidak semua sistem persamaaan linear (SPL) memiliki penyelesaian (solusi), Sistem Persamaan Linear (SPL) yang memiliki penyelesaian ada dua kemungkinan yaitu penyelesaian tunggal dan penyelesaian banyak. Secara lebih jelas dapat dilihat pada sistem umum dari dua persamaan linear dengan variabel *x* dan *y* berikut:

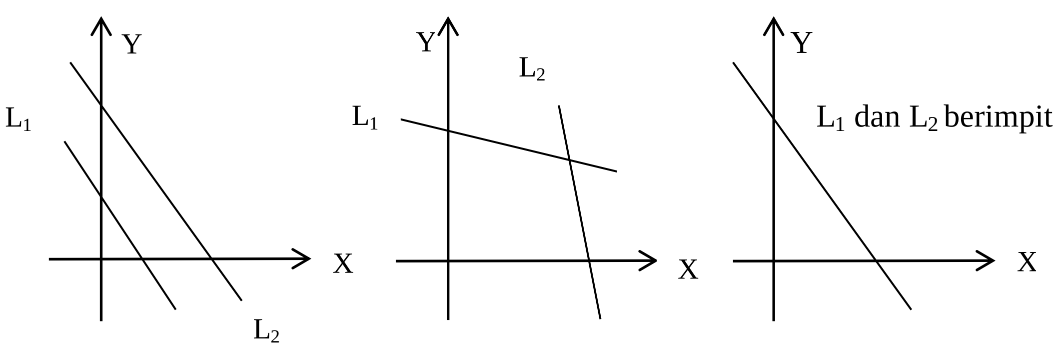
$a_1x + b_1y = c_1$ (a_1, b_1 kedua-duanya tak nol)

$a_2x + b_2y = c_2$ (a_2, b_2 kedua-duanya tak nol)

telah diketahui bahwa persamaan linear $ax + by = c$ menyatakan grafik berupa garis pada bidang-*xy* (ingat persamaan grafik fungsi linear $y = mx + c$, berupa garis lurus). Jadi sistem tersebut dapat digambarkan sebagai dua garis L_1 dan L_2 pada bidang xy. [22]

Contoh 8:

Ada tiga kemungkinan kedudukan kedua garis tersebut. Seperti pada gambar berikut:



(a) (b) (c)

Gambar 2.1 Kemungkinan-kemungkinan solusi sistem persamaan linear dua persamaan dalam dua variabel

Penyelesaian :

---

[22] Heri Purwanto,dkk, *Aljabar Linier*, (Jakarta : PT.Ercontara Rajawali,2005),h.14.

a. Tidak ada solusi

b. Satu solusi

c. Banyak solusi

Pada sistem persamaaan linear dengan dua peubah, secara geometris jika Sistem Persamaan Linear (SPL) tidak mempunyai penyelesaian maka grafiknya berupa dua garis yang saling sejajar, jika penyelesaiannya tunggal maka himpunan penyelesaiannya berupa sebuah titik hasil perpotongan dua garis sedangkan jika penyelesaiannya banyak maka himpunan penyelesaiannya berupa dua garis lurus yang saling berhimpit.

3. Solusi Sistem Persamaan Linear (SPL)

Suatu sistem persamaan juga dapat diselesaikan dengan metode subsitusi, eliminasi, atau grafik.

a. Metode Subsitusi

Metode subsitusi dimulai dengan satu persamaan dari sistem dan menyelesaikan satu variabel dengan bentuk variabel lainnya. Prosedur metode subsitusi adalah sebagai berikut :

1. Selesaikan satu variabel. Pilihlah satu persamaan dan selesaiakan satu variabel dalam bentuk variabel lainnya.
2. Subsitusi. Subsitusikan (mengganti) pernyataan yang didapat dari langkah pertama ke dalam persamaan lainnya, dan selesaikan untuk persamaan tersebut.

3. Subsitusi mundur. Subsitusi nilai yang di dapat dari langkah kedua ke pernyataan yang didapat di langkah pertama untuk memecahkan variabel yang tersisa.

Contoh 9:

Tentukan penyelesaiaan dari sistem berikut : $\begin{matrix} x^2 + y^2 = 100 \\ 3x - 4y = 10 \end{matrix}$

Penyelesaian :

1. Selesaikan y untuk persamaan kedua,

   $y = 3x - 10$ (diubah dalam bentuk y)

2. Kemudian y pada persamaan pertama disubsitusi sehingga pernyataan dalam bentuk x, dan menentukan nilai x :

   $x^2 + (3\mathrm{x} - 10)^2 = 100$

   $x^2 + (9x^2 - 60x + 100) = 100$

   $10x^2 - 60x = 0$

   $10x(\mathrm{x} - 6) = 0$

   $x = 0 \; atau \; x = 6$

3. Selanjutnya subsitusi kembali nilai-nilai x ke dalam persamaan :

   $\mathrm{y} = 3\mathrm{x} - 10$

   Untuk $x = 0;\ y = 3(0) - 10 = -10$

   Untuk $x = 6;\ y = 3(6) - 10 = 8$

4. Maka didapat dua penyelesaian yaitu : $(0, -10) \; dan \; (6,8)$.

b. Metode Eliminasi

Metode eliminasi dikombinasikan dengan penjumlahan dan pengurangan sedemikian rupa sehingga dapat mengeliminasi salah satu variabel. Prosedur metode eliminasi adalah sebagai berikut :

1. Tentukan variabel yag akan dieliminasi.
2. Samakan koefisiennya. Kalikan satu atau lebih persamaan dengan angka yang sesuai agar koefisien variabel yang akan dieliminasi pada satu persamaan merupakan negatifnya pada persamaan yang lainnya.
3. Jumlahkan persamaan. Jumlahkan kedua persamaan agar mengeliminasi satu variabel dan menyelesaikan variabel yang lainnya.
4. Substusi mundur. Subsitusikan nilai yang didapat pada langkah ke tiga ke dalam persamaan aslinya, dan tentukan solusi untuk variabel lainnya.

Contoh 10 :

Tentukan penyelesaian dari sistem berikut : $\begin{array}{r} 3\,\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 14 \\ x - 2y = 2 \end{array}$

Penyelesaian :

1. Pada koefisien suku y dari persamaan pertama merupakan negatif bagi suku y lain, maka persamaan tersebut dapat dijumlahkan dan mengeliminasi suku y

$$\begin{array}{rl} \mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 14 & \\ x - 2y = 2 & \\ \hline 4x \;= 16 & + \\ x \;= 4 & \end{array}$$

2. Kemudian subsitusi mundur $x = 4$ pada salah satu persamaan semula dan tentukan nilai y. Pilihlah persamaaan ke-2 karena tampak lebih sederhana

$x - 2y = 2$

$4 - 2y = 2$

$-2y = -2$

$y = 1$

c. Metode Grafik

Metode grafik sebagai alat untuk menyelesaikan sistem persaman. Prosedur metode grafik adalah sebagai berikut :

1. Membuat grafik tiap persamaan. Untuk menyatakan tiap persamaan dalam bentuk yang sesuai dengan alat hitung bergrafik, tentukan *y* sebagai fungsi dari x. Membuat grafik persamaan pada layar yang sama.
2. Temukan titik perpotongan. Penyelesaiannya berupa kordinat *x* dan *y* untuk titik perpotongan.[23]

Contoh 11 :

Tentukan penyelesaian dari sistem berikut : $\begin{matrix} x^2 - \mathrm{y} = 2 \\ 2x - y = 1 \end{matrix}$

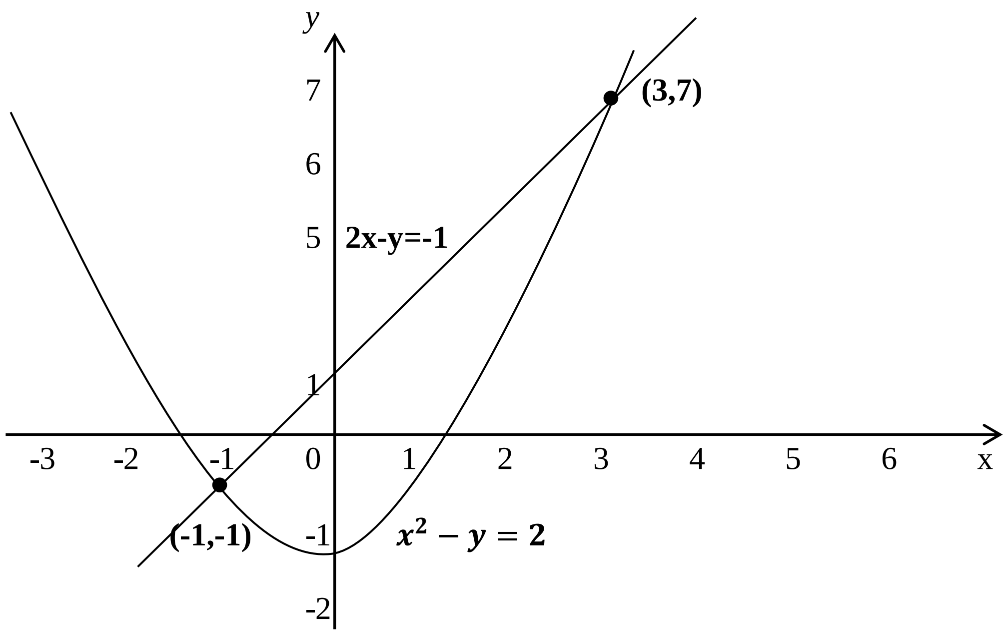
Penyelesaian :

1. Tentukan nilai *y* dalam suku *x* dan didapat sistem yang setara :

$$\begin{matrix} \mathrm{y} = x^2 - 2 \\ y = 2x + 1 \end{matrix}$$

2. Gambarkan grafik dari persamaan-persamaan berpotongan di dua titik. Dan penyelesaianya berupa (-1,-1) dan (3,7)

[23] Afidah,dkk, Matematika Dasar, (Jakarta : PT.Raja Grafindo Persada, 2014), h.146-151.



Gambar 2.2 Grafik penyelesaian sistem persamaan

C. Persegi Ajaib *(Magic Square)* dan Bilangan *Magic*

1. Sejarah Munculnya Persegi Ajaib *(Magic Square)*

Persegi ajaib sudah dikenal oleh matematikawan Cina sejak 650 Sebelum Masehi. Ada kemungkinan sudah dikenal oleh matematikawan Arab sejak abad ke-7 seperti albuni dalam kitabnya Syamsul Ma'arif dan Manbau Ushul Hikmah. Di abad 10 seorang ahli matematika asal Persia, Buzjani meninggalkan sebuah manuscript yang mana pada halaman 33 berisi beberapa pola wifik *(Magic Square)*. Dalam sebuah kitab ensiklopedia dari Bagdad circa 983 AD, kitab yang bernama Rasail Ikhwanu Shafa *(the encyclopdedia of brethren of purity)* karya Imam Ahmad bin Abdullah (4 juz) juga memuat beberapa contoh *Magic Square*. Kitab ini berisi 14 risalah, risalah pertama membahas Ilmu hitung termasuk *Magic Square* didalamnya, risalah kedua membahas handosat, risalah ketiga membahas Ilmu falak, risalah ke empat membahas Ilmu musik, dimana nanti dalam buku ini akan saya bahas antara chord music dan *Magic Squarenya* menurut para filosof. Dan terakhir risalah ke 14 membahas ilmu *Analotica*. Dalam kitab karya Imam Alghazali yang bernama Al Aufaq, atau kitab Mahzanu Al Aufaq sebuah kitab berbahasa Persia yang juga karya Alghazali. Juga memuat beberapa contoh *Magic Square* bahkan dijelaskan khasiat *Magic Square* dari 3×3 sampai 36×36.[24]

Menurut literatur Cina, Persegi ajaib ditemukan di Cina oleh raja *Yu* (禹) sekitar tahun 2200 sm. Terdapat legenda bahwa dahulu kala terdapat bencana banjir di sekitar sungai kuning. Saat raja *Yu* (禹) berusaha untuk menyalurkan air ke laut, terlihat kura-kura dengan pola titik-titik bulat bilangan yang diatur dalam suatu corak petak sembilan tiga aneh pada tempurung. Persegi ajaib yang ditemukan raja *Yu* (禹) tersebut disebut *Lo Shu*. Bilangan dalam *Lo Shu* ditunjukkan sebagai titik-titik atau noktah pada suatu tali. *Lo Shu* sebenarnya adalah persegi ajaib berukuran 3×3.

2. Pengertian Persegi Ajaib *(Magic Square)*

Sebuah buku karangan W. S Andrews (1960) dijelaskan bahwa persegi ajaib atau persegi magis *(Magic Square)* adalah bilangan dalam kotak-kotak yang berbentuk persegi dengan sifat jumlah bilangan menurut masing-masing baris, kolom, ataupun diagonalnya adalah sama. Persegi ajaib berukuran $n \times n$, sebanyak $n \times n$ disusun dalam kotak-kotak persegi dengan syarat tidak ada bilangan yang

[24] Moh. Rofii. *Kotak Ibrahim. (Cara Membuat Rajah, Wifik, Azimat, Magic Square dan Sulap Angka)*,2014, hal.5.

ditulis berulang dan jumlah bilangan-bilangan menurut masing-masing baris, kolom, ataupun diagonal adalah sama.[25]

Magic Square adalah angka yang jumlah baris, kolom, dan diagonal semua jumlah harus sama. *Magic Square* ini merupakan kesetaraan sempurna di segala arah atau dimensi. Pola elegan atau estetis dapat dibuat ketika, garis kontinu panjang tergabung dalam rangka hitung 1,2,3 sampai 4 dan lain-lainya ke nomor terakhir. Ini adalah bagaimana matematika berubah menjadi sebuah seni *(Art)*.[26]

3. Klasifikasi *Magic Square*

Terdapat tujuh klasifikasi dalam *magic Square* yaitu sebagai berikut:

a. Persegi Semi-Ajaib *(Semimagic Square)* adalah sebuah matriks yang berukuran $n \times n$, jika dijumlahkan dari elemen setiap baris dan kolom adalah sama. Dengan mengabaikan kedua diagonalnya.

Contoh 12 :

1	17	8	24	15
7	23	14	5	16
13	4	20	6	22
19	10	21	12	3
25	11	2	18	9

[25] Rosy Aliviana,dkk, *Analisis Matematik Terhadap Azimat Numerik.* (Malang: UIN Maulana Malik Ibrahin) Jurnal CAUCHY – ISSN: 2086-0382 vol. 2, 2012, hal. 107.

[26] Jain, *The book of Magic Square*, Vol 3,No. 2000, h.1.

b. *Diabolik, Pandiagonal* atau Persegi ajaib Sempurna *(Perfect Magic Square)* adalah persegi ajaib jika ditambahkan maka jumlah dari setiap baris, kolom, diagonal utama dan diagonal kedua adalah sama atau konstan. Contoh pada jumlah persegi ajaib berukuran 5×5 yaitu 65 adalah

Contoh 13 :

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

c. Persegi ajaib simetris *(Symmetric Magic Square)* adalah persegi ajaib yang mempunyai jumlah dari dua sel dari setiap dua sel yang simetris dan dua ditengah maka jumlahnya sama. Persegi ajaib simetris disebut juga *associative Magic Square*.

Contoh 14 :

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

d. Persegi ajaib konsentrik atau *Bordered* adalah persegi ajaib yang menghilangkan bagian atas, bawah, kiri dan kanan kolom akan menghasilkan persegi ajaib lain.

Contoh 15 :

15	22	9	16	3
2	14	21	8	20
19	1	13	25	7
6	18	5	12	24
23	10	17	4	11

e. Sebuah persegi ajaib Nol atau *(Zero Magic Square)* adalah persegi ajaib yang jika dijumlahkan memiliki urutan baris, kolom, dan diaogonal adalah bilangan 0.

Contoh 16 :

4	11	-12	-5	2
10	-8	-6	1	3
-9	-7	0	7	9
-3	-1	6	8	-10
-2	5	12	-11	-4

f. Persegi ajaib perkalian *(Geometric)* adalah Matriks persegi dari bilangan yang hasil setiap elemen baris, kolom, diagonal utama dan diagonal kedua adalah konstan.

Contoh 17 :

432	6	18	16
4	7	24	108
8	36	12	216
54	48	144	2

g. Persegi ajaib Penjumlahan-Perkalian *(Addition-Multiplication Magic Square)* adalah persegi ajaib dimana jika dijumlahkan dan dikalikan dalam setiap baris, kolom, dan kedua diagonal memiliki jumlah yang sama.[27]

Contoh 18 :

9	7	5	3	1
5	3	1	9	7
1	9	7	5	3
7	5	3	1	9
3	1	9	7	5

4. Bentuk Umum *Magic Square*

Misalkan elemen dari baris ke-*i* dan kolom ke-*j* adalah a_{ij}, maka *Magic Square*nya secara umum adalah:

[27] Rosy Aliviana,dkk, *Analisis Matematik Terhadap Azimat Numerik.* (Malang: UIN Maulana Malik Ibrahin) Jurnal CAUCHY – ISSN: 2086-0382 vol. 2, 2012, hal. 107-108.

Tabel 2.1. Bentuk umum *Magic Square* $n \times n$

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$a_{n,n}$

Dengan:

$\mathrm{a_{i,j}} \in \{1, 2, 3, \ldots\ \mathrm{n}^2\ \}$ untuk $\mathrm{i, j} \in \{1, 2, 3, \ldots\ \mathrm{n}\ \}$ (1)

Dan $\mathrm{a_{p,q}} = \mathrm{a_{r,s}} \Longrightarrow \mathrm{p} = \mathrm{r}$ dan $\mathrm{q} = \mathrm{s}$ dan untuk semua $\mathrm{p, q, r, s} \in \{1, 2, 3, \ldots\ \mathrm{n}\}$ (2)

Persamaan ini dimaksudkan untuk menjamin tidak ada angka yang terpakai dua kali, sehingga semua bilangan dari 1 sampai dengan n^2 terpakai. Bilangan *magic* untuk *Magic Square* tersebut adalah

$$m = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} = \ldots = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} = \ldots = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1,j} \quad (3)$$

Jika seluruh elemen dari *Magic square* dijumlahkan, maka

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n^2} k \quad (4)$$

Misalkan :

$$\sum_{i=1}^{n} m$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3} + \cdots + a_{i,n}$$

$$= (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + \cdots + a_{1n}) + (a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + \ldots + a_{2,n} +$$

$$(a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + \ldots + a_{3n}) + (a_{n,1} + a_{n,2} + a_{n,3} + \ldots + a_{n,n})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}$$

$$= n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\right) = \sum_{k=1}^{n^2} k$$

$$= n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\right) = 1+2+3+4+\ldots+n^2-4+n^2-3+n^2-2+n^2-1+n^2$$

$$= n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\right) = (1+n^2)+(n^2-1+2)+(n^2-2+3)+(n^2-3+4)+\ldots+\left(\left(\frac{n^2}{2}\right)+\left(\frac{n^2}{2}+1\right)\right)$$

$$= n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) = (1+n^2)+(1+n^2)+(1+n^2)+(1+n^2)+\ldots+\left(2\left(\frac{n^2}{2}\right)+1\right)$$

$$= n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) = (1+n^2)\left(\frac{n^2}{2}\right)$$

Dari kedua persamaan (3) dan (4), maka

$$n(m) = \left(\frac{n^2}{2}\right)(1+n^2)$$

$$m = \frac{\left(\frac{n^2}{2}\right)(1+n^2)}{n}$$

$$m = \frac{n^2}{2} n(1+n^2)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$m = \frac{n}{2}(1+n^2) \leftrightarrow \frac{1}{2}n(1+n^2) \quad (5)$$

D. Contoh Penyelesaian *Magic Square* untuk $n = 3$

Langkah-langkah dalam menyelesaikan *Magic Square* dengan menggunakan sistem persamaan linear (SPL) yaitu sebagai berikut:

1. Menentukan bentuk umum dari *Magic Square*, dan bilangan *Magic*. Untuk $n = 3$, *Magic Square*-nya adalah:

Tabel 2.2. Bentuk umum *Magic Square* 3×3

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$

Kemudian untuk menentukan bilangan *Magic Square-Magic Square*-nya dan nilai *m* atau jumlah semua baris, kolom, dan kedua diagonalnya yaitu dengan cara:

$$\left.\begin{aligned} a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} &= \textstyle\sum_{j=1}^{3} a_{1,j} \\ a_{2,1} + a_{2,2} + a_{3,3} &= \textstyle\sum_{j=1}^{3} a_{2,j} \\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} &= \textstyle\sum_{j=1}^{3} a_{3,j} \end{aligned}\right\} \text{jumlah baris}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} &= \textstyle\sum_{i=1}^{3} a_{i,1} \\ a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} &= \textstyle\sum_{i=1}^{3} a_{i,2} \\ a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} &= \textstyle\sum_{i=1}^{3} a_{i,3} \end{aligned}\right\} \text{jumlah kolom} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} &= \textstyle\sum_{i=1}^{3} a_{i,i} \\ a_{3,1} + a_{2,2} + a_{1,3} &= \textstyle\sum_{j=1}^{3} a_{n-j+1\,,j} \end{aligned}\right\} \text{jumlah diagonal}$$

Sehingga, untuk menentukan nilai m dimana $n = 3$ yaitu :

$$m = \frac{1}{2}n(n^2 + 1) = \frac{1}{2}3(3^2 + 1) = 15$$

Jadi jumlah untuk semua baris, kolom, dan diagonal utama dan diagonal keduanya harus bernilai 15.

2. Menentukan bentuk umum Sistem Persamaan Linear dari *Magic Square*.

Dengan menjabarkan persamaan (1), maka bentuk sistem persamaan linear-nya yaitu sebagai berikut:

$$\begin{cases} a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} = 15 \\ a_{2,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = 15 \\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = 15 \\ a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} = 15 \\ a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} = 15 \\ a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} = 15 \\ a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = 15 \\ a_{3,1} + a_{2,2} + a_{1,3} = 15 \end{cases} \quad (2)$$

3. Menentukan bentuk umum Matriks Sistem Persamaan Linear dari *Magic Square.*

Dari persamaan (2), sistem persamaan linear diatas dapat dibentuk kedalam matriks yang diperluas yaitu sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{2,3} \\ a_{3,2} \\ a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Bentuk ringkasanya adalah:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

4. Melakukan operasi baris elementer (OBE) terhadap matriks Sitem Persamaan Linear (SPL) yang telah terbentuk.

Dengan melakukan beberapa operasi baris elementer pada matriks di atas, didapatkan bentuk eselon baris sebagai berikut:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

5. Menyusun kembali ke bentuk Sistem Persamaan Linear dari hasil operasi baris elementer.

Setelah diperoleh hasil dari operasi baris elementer, dan didapatkan bentuk eselon baris. Hasil tersebut diterjemahkan/disusun kembali ke dalam bentuk Sistem Persamaan Linear sebagai berikut:

$$\begin{cases} a_{1,1} + a_{3,3} = 10 \\ a_{1,2} + a_{3,2} = 10 \\ a_{1,3} - a_{3,2} - a_{3,3} = -5 \\ a_{2,1} - a_{3,2} - 2a_{3,3} = -10 \\ a_{2,2} = 5 \\ a_{2,3} + a_{3,2} + 2a_{3,3} = 20 \\ a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = 15 \end{cases} \tag{3}$$

Dari Sistem Persamaan Linear (SPL) yang sudah disederhanakan diatas, langsung didapatkan nilai untuk $a_{2,2}$ yaitu 5. Hal ini berarti kotak tengah dari solusi untuk *Magic Square* berukuran3×3, haruslah diisi dengan angka 5. Dari Sistem Persamaan Linear (SPL) tersebut pula didapatkan 6 persamaan berikut:

$$\begin{cases} a_{1,1} = 10 - a_{3,3} \\ a_{1,2} = 10 - a_{3,2} \\ a_{1,3} = -5 + a_{3,2} + a_{3,3} \\ a_{2,1} = -10 + a_{3,2} + 2a_{3,3} \\ a_{2,3} = 20 - a_{3,2} - 2a_{3,3} \\ a_{3,1} = 15 - a_{3,2} - a_{3,3} \end{cases} \tag{4}$$

Keenam persamaan ini menunjukkan enam peubah yang bergantung pada peubah lain yaitu $a_{1,1}; a_{1,2}; a_{1,3}; a_{2,1}; a_{2,3}; a_{3,1}$ dan dua peubah parameter yaitu $a_{3,2}$ dan $a_{3,3}$.

6. Mencari penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan prinsip solusi umum Sistem Persamaan Linear.

Dari bentuk Sistem Persamaan Linear (SPL) sederhana diatas, perhatikan bahwa dari kedelapan peubah tersebut, haruslah ada 4 bilangan ganjil, dan 4 bilangan genap, dan hal ini hanya diberikan oleh pasangan $a_{3,2}$ ganjil dan $a_{3,3}$ genap. Secara lebih jelas dapa dilihat sebagai berikut :

$1 \leq a_{3,1} \leq 9$ dan $a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} = 15$

Misalkan :

$1 \leq a_{3,1} \leq 9 \leftrightarrow a_{3,1} \rightarrow 1 - 9$

$a_{3,2} + a_{3,3} = 15 \leftrightarrow 6 \leq a_{3,2} + a_{3,3} \leq 14$

Dengan demikian pasangan-pasangan $(a_{3,2};\ a_{3,3})$ yang memungkinkan memberikan solusi untuk *Magic square* berukuran *3x3* adalah (1,6); (1,8); (3,4); (3,6); (3,8); (7,2); (7,4); (7,6); (9,2); dan (9,4)

Dari kesepuluh pasangan ini dengan menggunakan solusi umum penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL) didapatkan solusi yang memenuhi sistem persamaan (4) hanyalah pasangan-pasangan (1,6); (1,8); (3,4); (3,8); (7,2); (7,6); (9,2); dan (9,4). Kedelapan solusi tersebut dalam bentuk tabel adalah:

Tabel 2.3. Solusi dari sistem persamaan (4)

$(a_{3,2},\ a_{3,3})$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3},$	$a_{2,1}$	$a_{2,3}$	$a_{3,1}$
(1,6)	4	9	2	3	7	8
(1,8)	2	9	4	7	3	6
(3,4)	6	7	2	1	9	8
(3,8)	2	7	6	9	1	4
(7,2)	8	3	4	1	9	6
(7,6)	4	3	8	9	1	2
(9,2)	8	1	6	3	7	4
(9,4)	6	1	8	7	3	2

Dari tabel di atas didapatkan solusi umum untuk penyelesaian *Magic Square*. Kedelapan *Magic Square* tersebut adalah :

Tabel 2.4 Solusi *Magic Square* 3×3

4	9	2

2	9	4

6	7	2

2	7	6

3	5	7
8	1	6

(a)

7	5	3
6	1	8

(b)

1	5	9
8	3	4

(c)

9	5	1
4	3	8

(d)

8	3	4
1	5	9
6	7	2

(e)

4	3	8
9	5	1
2	7	6

(f)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(g)

6	1	8
7	5	3
2	9	4

(h)

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang dilakukan berdasarkan dengan tema pembahasan tersebut adalah kajian kepustakaan, yaitu dengan meneliti, mengkaji dan menyelidiki dokumen atau leteratur serta tulisan yang berkaitan dengan penelitian ini.

B. Waktu dan Lokasi Penelitian

Tempat dan waktu penelitian adalah di perpustakaan UIN Alauddin Makassar. Pada penulisan ini menyangkut masalah kajian pustaka yang berjudul Sistem Persamaan Linear (SPL) untuk penyelesaian *Magic Square* yang dilaksanakan pada bulan Mei sampai Agustus 2015.

C. Prosedur Penelitian

Didalam penelitian yang penulis menyusun beberapa langkah-langkah penelitian atau prosedur penelitian yang akan menjadi acuan dalam melakukan penelitian. Adapun prosedur penelitian yang akan dilakukan yaitu sebagai berikut:

1. Untuk mendapatkan penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan solusi umum sistem persamaan linear (SPL). Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut :

   a. Menentukan bentuk umum dari *Magic Square*, dan bilangan *Magic*. Misalkan elemen dari baris ke-i dan kolom ke-j adalah a_{ij}, maka *Magic Square*nya secara umum adalah:

Tabel 3.1. Bentuk umum *Magic Square* $n \times n$

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$a_{n,n}$

dengan: $\mathrm{a_{i,j}} \in \{1, 2, 3, \ldots\ \mathrm{n}^2\}$ untuk $\mathrm{i, j} \in \{1, 2, 3, \ldots\ \mathrm{n}\}$

dan $\mathrm{a_{p,q}} = \mathrm{a_{r,s}} \Longrightarrow \mathrm{p} = \mathrm{r}$ dan $\mathrm{q} = \mathrm{s}$ dan untuk semua $\mathrm{p, q, r, s} \in \{1, 2, 3, \ldots\ \mathrm{n}\}$

Persamaan ini dimaksudkan untuk menjamin tidak ada angka yang terpakai dua kali, sehingga semua bilangan dari 1 sampai dengan n^2 terpakai. Untuk menentukan Bilangan *Magic* untuk *Magic Square* tersebut adalah:

1. Untuk menghitung jumlah baris:

$$a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{1,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}$$

$$a_{2,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{2,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}$$

$$a_{n,1} + a_{n,2} + \cdots + a_{n,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}$$

Sehingga,

$$m = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} = . \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} = . \ . \ . \ . \ .$$

2. Untuk menghitung jumlah kolom:

$$a_{1,1} + a_{2,1} + \cdots + a_{n,1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}$$

$$a_{1,2} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,2} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,2}$$

$$a_{1,n} + a_{2,n} + \cdots + a_{n,n} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}$$

Sehingga,

$$m = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} = .\ .\ .\ .\ .$$

3. Untuk menghitung jumlah diagonalnya:

$$a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

$$a_{3,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n-j+1\,,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1\,,j}$$

Sehingga,

$$m = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1\,,j} = .\ .\ .\ .\ .$$

Dari beberapa notasi diatas dapat dituliskan sebagai berikut.

$m = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} = \ldots = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} = \ldots = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}$

$= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1,j}$

Jika seluruh elemen dari *Magic Square* dijumlahkan, maka:

$m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n^2} k$

Dari kedua persaamaan diatas maka;

$m = \frac{1}{2} n(n^2 + 1)$

b. Menentukan bentuk umum Sistem Persamaan Linear (SPL) dari *Magic Square*. Dengan menjabarkan beberapa persaman, maka bentuk:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} = m \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} = m \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} = m \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} = m \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} = m \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} = m \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = m \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1,j} = m \end{cases}$$

Adalah sebuah Sistem Persamaan Linear (SPL) dengan $2n + n$ persamaan dan n^2 peubah. Sistem Persamaan diatas dapat diringkas menjadi:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = m \, ; i = 1, 2, \dots, n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = m \, ; j = 1, 2, \dots, n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = m \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n-j+1,j} = m \end{cases}$$

c. Menentukan bentuk umum Matriks Sistem Persamaan Linear dari *Magic Square.*

$$\boldsymbol{A_{n\times n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks dari Sistem Persamaan Linear (SPL) ini adalah $\boldsymbol{KA} = \boldsymbol{m}$ dengan:

$\boldsymbol{K}$ = matriks koefisien berukuran $(2n + 2) \times n^2$

$\boldsymbol{A}$ = $(\mathrm{a}_{1,1}\mathrm{a}_{1,2} \ldots \mathrm{a}_{1,\mathrm{n}}\ \mathrm{a}_{2,1}\mathrm{a}_{2,2} \ldots \mathrm{a}_{2,\mathrm{n}} \ldots \mathrm{a}_{1,\mathrm{n}}\mathrm{a}_{\mathrm{n},2} \ldots \mathrm{a}_{\mathrm{n},\mathrm{n}})$

$\boldsymbol{m}$ = vektor kolom berukuran $\frac{1}{2}n(n^2 + 1)$ dengan seluruh elemennya adalah nilai *m*.

d. Melakukan operasi baris elementer (OBE) terhadap matriks Sistem Persamaan Linear (SPL) yang telah terbentuk**.**

Beberapa operasi matriks diantaranya adalah penjumlahan, perkalian skalar, perkalian vektor, dan invers. Pada bagian ini akan ditunjukkan apakah yang terjadi jika operasi-operasi tersebut dilakukan terhadap *magic square*. Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah *magic square*, $\boldsymbol{J_n}$ adalah matriks $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ yang semua elemennya adalah 1, dan k adalah suatu bilangan asli, maka akan dicari beberapa bentuk berikut:

i. $k\boldsymbol{A}$

ii. $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{J_n}$

iii. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

iv. $\boldsymbol{AB}$

Pada tahapan ini, bentuk umum dari sistem persamaan linear (SPL) yang diperoleh pada langkah 3 yang telah disusun kedalam bentuk matriks $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ pada langkah 4, akan diselesaikan dengan cara operasi baris elementer. Dengan melakukan beberapa operasi baris elementer pada matriks di atas, didapatkan bentuk eselon baris. Kemudian hasil tersebut diterjemahkan kembali ke dalam bentuk Sistem Persamaan Linear (SPL).

e. Menyusun kembali ke bentuk Sistem Persamaan Linear (SPL) dari hasil operasi baris elementer.

Setelah diperoleh hasil dari operasi baris elementer, dan didapatkan bentuk eselon baris. Hasil tersebut diterjemahkan/disusun kembali ke dalam bentuk Sistem Persamaan Linear (SPL). Dari Sistem Persamaan Linear (SPL) yang sudah disederhanakan tersebut, maka akan didapatkan nilai peubah-peubah yang memungkinkan memberikan solusi untuk penyelesaian *Magic Square* dengan ukuran $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$.

f. Mencari penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan prinsip solusi umum Sistem Persamaan Linear (SPL).

Setelah hasil operasi baris elementer diterjemahkan kembali ke Sistem Persamaan Linear (SPL) dan diperoleh beberapa peubah. Dimana Sistem persamaan linear tersebut akan memperlihatkan beberapa peubah yang bergantung terhadap peubah lain, dan beberapa peubah parameter. Beberapa peubah parameter ini akan sulit melakukan pengujian untuk semua permutasi dari nilai-nilainya.

Dalam proses pencarian solusi ini, proses yang digunakan untuk mendapatkan banyaknya solusi *Magic Square* yaitu dengan melakukan pereduksian Sistem Persamaan Linear (SPL) yang menggunakan teorema Meyer. H.B. Meyer (2010) juga mendapatkan beberapa batasan tambahan yang digunakan untuk mengurangi panjangnya proses komputasi.[28]

g. Penarikan kesimpulan.

Pada tahap ini merupakan tahap akhir, dimana pada tahap sebelumnya telah didapatkan solusi umum *Magic Square* dengan ukuran $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ dari penyelesaian sistem persamaan linear. Maka dilakukan penarikan kesimpulan akan dilakukan. Namun pada tahap ini, penarikan kesimpulan harus mengacu pada rumusan masalah dan batasan masalah yang telah diuraiankan pada BAB I.

2. Untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan linear (SPL) dalam penyelesaian *Magic Square* dengan software Mathematica 7.0. Adapun langkah-langkahnya sebgai berikut :

a. Algoritma *Magic Square*

1. Mulai

2. Menentukkan nilai n, dimana $n = 7$

3. Menentukan bentuk *magic squarenya*

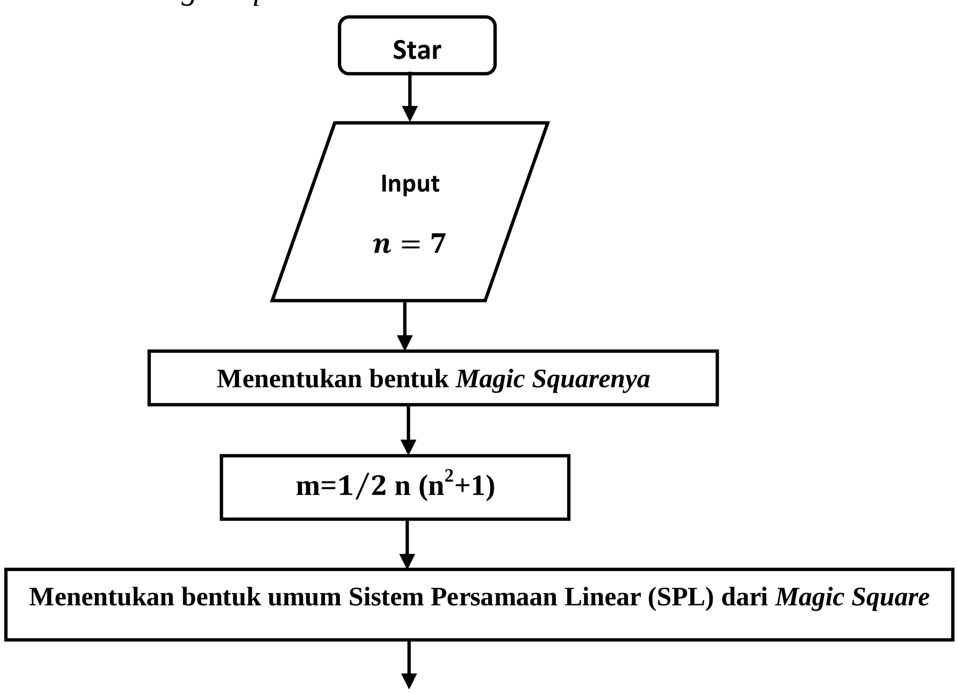
4. Mencari nilai m=1/2 n(n^2+1)

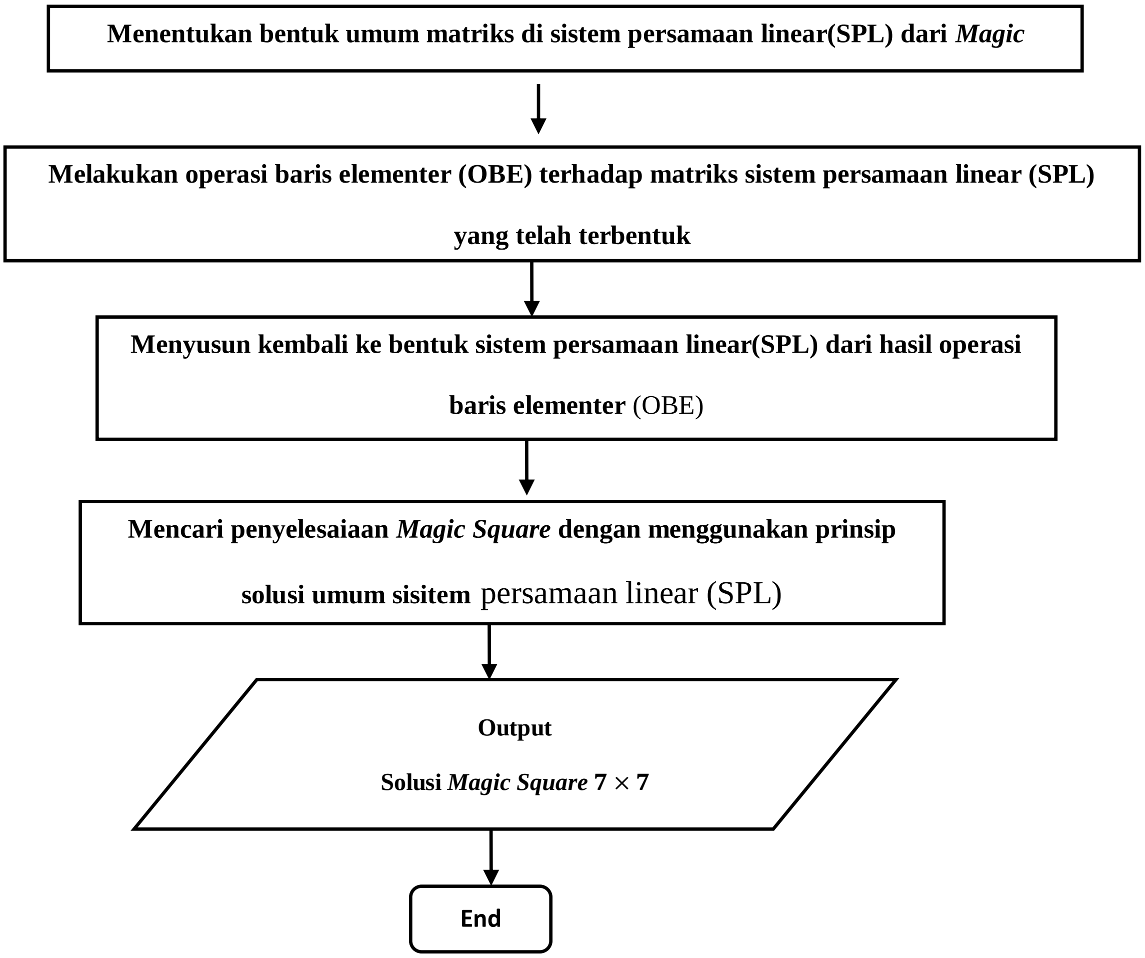
---

[28] Rismanto Fernandus SR. *Penyelesaian Magic Square sebagai Permasalahan Sistem Persamaan Linear (SPL).* (Bogor: Intitut Pertanian Bogor, 2011). h.7-9.

5. Menentukan bentuk umum sistem persamaan linear (SPL) dari *Magic Square*
6. Menentukan bentuk umum matriks di sistem persamaan linear (SPL) dari *Magic Square*
7. Melakukan operasi baris elementer (OBE) terhadap matriks sistem persamaan linear (SPL) yang telah terbentuk
8. Menyusun kembali ke bentuk sistem persamaan linear (SPL) dari hasil operasi baris elementer (OBE)
9. Mencari penyelesaiaan *Magic Square* dengan menggunakan prinsip solusi umum Sistem Persamaan Linear (SPL)
10. Menghasilkan solusi *Magic Square* 7×7
11. Selesai.

b. Flowchart *Magic Square*




Menentukan bentuk umum matriks di sistem persamaan linear(SPL) dari Magic
Melakukan operasi baris elementer (OBE) terhadap matriks sistem persamaan linear (SPL) yang telah terbentuk
Menyusun kembali ke bentuk sistem persamaan linear(SPL) dari hasil operasi baris elementer (OBE)
Mencari penyelesaiaan Magic Square dengan menggunakan prinsip solusi umum sisitem persamaan linear (SPL)
Output
Solusi Magic Square 7 × 7
End

BAB IV

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Hasil Penelitian

1. Mendapatkan penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan solusi sistem persamaan linear (SPL) sampai dengan berordo 7×7.

Menyelesaikan *Magic Square* dengan solusi Sistem Persamaan Linier (SPL) untuk mendapatkan bilangan *Magic Square* berukuran 6×6 sampai 7×7. Untuk menjawab permasalahan, digunakan langkah-langkah sebagai berikut :

4.1 Penyelesaian untuk $n = 6$

a. Menentukan bentuk umum dari *Magic Square*, dan bilangan *Magic*.

Dalam penelitian ini peniliti akan menentukan solusi umum dari *Magic Square* yang berukuran 6×6. Sehingga *Magic Square*nya secara umum adalah:

Tabel 4.1. Bentuk umum *Magic Square* 6×6

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	$a_{1,6}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	$a_{2,6}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	$a_{3,6}$
$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$	$a_{4,6}$
$a_{5,1}$	$a_{5,2}$	$a_{5,3}$	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$	$a_{5,6}$
$a_{6,1}$	$a_{6,2}$	$a_{6,3}$	$a_{6,4}$	$a_{6,5}$	$a_{6,6}$

Dari tabel 4.1. Bentuk umum *Magic Square* diatas maka untuk menentukan bilangan *Magic* untuk *Magic Square* tersebut adalah:

1. Untuk menghitung jumlah baris:

   $a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4} + a_{1,5} + a_{1,6} = \sum_{j=1}^{6} a_{1,j}$

   $a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + a_{2,4} + a_{2,5} + a_{2,6} = \sum_{j=1}^{6} a_{2,j}$

   $a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + a_{3,4} + a_{3,5} + a_{3,6} = \sum_{j=1}^{6} a_{3,j}$

   $a_{4,1} + a_{4,2} + a_{4,3} + a_{4,4} + a_{4,5} + a_{4,6} = \sum_{j=1}^{6} a_{4,j}$

   $a_{5,1} + a_{5,2} + a_{5,3} + a_{5,4} + a_{5,5} + a_{5,6} = \sum_{j=1}^{6} a_{5,j}$

   $a_{6,1} + a_{6,2} + a_{6,3} + a_{6,4} + a_{6,5} + a_{6,6} = \sum_{j=1}^{6} a_{6,j}$

   Sehingga,

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{6} a_{1,j} = \sum_{j=1}^{6} a_{2,j} = \sum_{j=1}^{6} a_{3,j} = \sum_{j=1}^{6} a_{4,j} = \sum_{j=1}^{6} a_{5,j} = \sum_{j=1}^{6} a_{6,j} = m} \quad \textbf{(1)}$$

2. Untuk menghitung jumlah kolom:

   $a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} + a_{4,1} + a_{5,1} + a_{6,1} = \sum_{i=1}^{6} a_{i,1}$

   $a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} + a_{4,2} + a_{5,2} + a_{6,2} = \sum_{i=1}^{6} a_{i,2}$

   $a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} + a_{4,3} + a_{5,3} + a_{6,3} = \sum_{i=1}^{6} a_{i,3}$

   $a_{1,4} + a_{2,4} + a_{3,4} + a_{4,4} + a_{5,4} + a_{6,4} = \sum_{i=1}^{6} a_{i,4}$

   $a_{1,5} + a_{2,5,} + a_{3,5} + a_{4,5} + a_{5,5} + a_{6,5} = \sum_{i=1}^{6} a_{i,5}$

   $a_{1,6} + a_{2,6} + a_{3,6} + a_{4,6} + a_{5,6} + a_{6,6} = \sum_{i=1}^{6} a_{i,6}$

   Sehingga,

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{6} a_{i,1} = \sum_{i=1}^{6} a_{i,2} = \sum_{i=1}^{6} a_{i,3} = \sum_{i=1}^{6} a_{i,4} = \sum_{i=1}^{6} a_{i,5} = \sum_{i=1}^{6} a_{i,6} = m} \quad \textbf{(2)}$$

3. Untuk menghitung jumlah diagonalnya:

$$a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} + a_{5,5} + a_{6,6} = \sum_{i=1}^{6} a_{i,i}$$

$$a_{6,1} + a_{5,2} + a_{4,3} + a_{3,4} + a_{2,5} + a_{1,6} = \sum_{j=1}^{6} a_{(6-j)+1\,,j}$$

Sehingga,

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{6} a_{i,i} = \sum_{j=1}^{6} a_{(6-j)+1\,,j} = m} \qquad \textbf{(3)}$$

Dari beberapa notasi diatas dapat dituliskan sebagai berikut. Jika seluruh elemen dari *Magic Square* dijumlahkan, maka:

$$m = \frac{1}{2}n(n^2+1) = \frac{1}{2}6(6+1) = \frac{1}{2}6(36+1) = \frac{6}{2}(37) = 111$$

Jadi untuk jumlah semua baris, kolom dan kedua diagonalnya haruslah berjumlah 111. Kemudian untuk menentukan masing-masing bilangan *Magic Square* untuk ukuran 6×6 dimana ada sebanyak 36 bilangan akan digunakan prinsip Sistem Persamaan Linear (SPL).

b. Menentukan bentuk umum Sistem Persamaan Linear dari *Magic Square*.

Dengan menjabarkan persamaan (1), (2), dan (3), maka bentuk diperoleh bentuk umum dari Sistem Persamaan Linear untuk *Magic Square* ukuran 6×6. Untuk lebih lengkapnya Sistem Persamaan Linear (SPL) dari persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$
\begin{cases}
a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4} + a_{1,5} + a_{1,6} = \mathbf{111} \\
a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + a_{2,4} + a_{2,5} + a_{2,6} = \mathbf{111} \\
a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + a_{3,4} + a_{3,5} + a_{3,6} = \mathbf{111} \\
a_{4,1} + a_{4,2} + a_{4,3} + a_{4,4} + a_{4,5} + a_{4,6} = \mathbf{111} \\
a_{5,1} + a_{5,2} + a_{5,3} + a_{5,4} + a_{5,5} + a_{5,6} = \mathbf{111} \\
a_{6,1} + a_{6,2} + a_{6,3} + a_{6,4} + a_{6,5} + a_{6,6} = \mathbf{111} \\
a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} + a_{4,1} + a_{5,1} + a_{6,1} = \mathbf{111} \\
a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} + a_{4,2} + a_{5,2} + a_{6,2} = \mathbf{111} \\
a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} + a_{4,3} + a_{5,3} + a_{6,3} = \mathbf{111} \\
a_{1,4} + a_{2,4} + a_{3,4} + a_{4,4} + a_{5,4} + a_{6,4} = \mathbf{111} \\
a_{1,5} + a_{2,5,} + a_{3,5} + a_{4,5} + a_{5,5} + a_{6,5} = \mathbf{111} \\
a_{1,6} + a_{2,6} + a_{3,6} + a_{4,6} + a_{5,6} + a_{6,6} = \mathbf{111} \\
a_{6,1} + a_{5,2} + a_{4,3} + a_{3,4} + a_{2,5} + a_{1,6} = \mathbf{111} \\
a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} + a_{5,5} + a_{6,6} = \mathbf{111}
\end{cases} \tag{4}
$$

c. **Menentukan bentuk umum Matriks Sistem Persamaan Linear (SPL) dari *Magic Square.***

Berdasarkan persamaan (4) diatas kita dapat membentuk matriks yang diperluas sebagai berikut:

$$
\left|\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 111 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 111 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 111 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 111 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 111 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 111 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 111 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 111 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 111 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 111 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 111 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 111 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 111 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 111
\end{array}\right|
$$

d. Melakukan Operasi Baris Elementer (OBE) terhadap matriks Sistem Persamaan Linear (SPL) yang telah terbentuk.

Setelah didapatkan bentuk umum matriks dari Magic Square ukuran 6×6, maka tahapan selanjutnya yaitu menentukan eselon baris dengan menggunakan operasi baris elementer. Untuk memudahkan proses operasi baris elementer, penulis menggunakan bantuan *microsoft office excel v.2010.* Setelah melakukan beberapa tahapan operasi baris elementer, didapatkan bentuk eselon baris seperti berikut :

1	0	0	0	0	0	0	0	-0.5	-0.5	0	-1	0	-0.5	0	0	-0.5	-1	0	-0.5	0	0	-0.5	-1	0	0	-0.5	-0.5	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-222
0	1	0	0	0	0	0	0	-0.5	-0.5	0	-1	0	0.5	-1	0	-0.5	-1	0	0.5	0	-1	-0.5	-1	0	1	-0.5	-0.5	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-2	-222
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	111
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	111
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	1	1	0	0	-1	0	1	1	0	-1	0	0	1	1	0	1	1	1	2	2	222
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	111
0	0	0	0	0	0	1	0	0.5	0.5	0	1	0	-0.5	-1	-1	-0.5	0	0	-0.5	-1	-1	-0.5	0	0	-1	-0.5	-0.5	-1	0	0	0	0	0	0	0	-111
0	0	0	0	0	0	0	1	0.5	0.5	0	1	0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	0	1	0.5	1	0	0	0.5	0.5	1	1	0	1	1	1	1	2	333
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	-1	0	0	1	0	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-2	-111
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	111
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

e. Menyusun kembali ke bentuk Sistem Persamaan Linear dari hasil Operasi Baris Elementer (OBE).

Setelah diperoleh bentuk eselon baris dari hasil operasi baris elementer, hasil tersebut diterjemahkan/disusun kembali ke dalam bentuk Sistem Persamaan Linear (SPL). Sehingga dapat diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$a_{1,1} - \frac{1}{2}a_{2,3} - \frac{1}{2}a_{2,4} - a_{2,6} - \frac{1}{2}a_{3,2} - \frac{1}{2}a_{3,5} - a_{3,6} - \frac{1}{2}a_{4,2} - \frac{1}{2}a_{4,5} - a_{4,6} - \frac{1}{2}a_{5,3} - \frac{1}{2}a_{5,4} - a_{5,6} - a_{6,2} - a_{6,3} - a_{6,4} - a_{6,5} - a_{6,6} = -222$$

$$a_{1,2} - \frac{1}{2}a_{2,3} - \frac{1}{2}a_{2,4} - a_{2,6} + \frac{1}{2}a_{3,2} - a_{3,3} - \frac{1}{2}a_{3,5} - a_{3,6} + \frac{1}{2}a_{4,2} - a_{4,4} - \frac{1}{2}a_{4,5} - a_{4,6} - \frac{1}{2}a_{5,3} - \frac{1}{2}a_{5,4} - a_{5,5} - a_{5,6} - a_{6,3} - a_{6,4} - a_{6,5} - 2a_{6,6} = -222$$

$$a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} + a_{4,3} + a_{5,3} + a_{6,3} = 111$$

$$a_{1,4} + a_{2,4} + a_{3,4} + a_{4,4} + a_{5,4} + a_{6,4} = 111$$

$$a_{1,5} + a_{2,6} - a_{3,4} + a_{3,5} + a_{3,6} - a_{4,3} + a_{4,5} + a_{4,6} - a_{5,2} + a_{5,5} + a_{5,6} + a_{6,2} + a_{6,3} + a_{6,4} + 2a_{6,5} + 2a_{6,6} = 222$$

$$a_{1,6} + a_{2,6} + a_{3,6} + a_{4,6} + a_{5,6} + a_{6,6} = 111$$

$$a_{2,1} + \frac{1}{2}a_{2,3} + \frac{1}{2}a_{2,4} + a_{2,6} - \frac{1}{2}a_{3,2} - a_{3,3} - a_{3,4} - \frac{1}{2}a_{3,5} - \frac{1}{2}a_{4,2} - a_{4,3} - a_{4,4} - \frac{1}{2}a_{4,5} - \frac{1}{2}a_{5,2} - \frac{1}{2}a_{5,3} - \frac{1}{2}a_{5,4} - a_{5,5} = -111$$

$$a_{2,2} + \frac{1}{2}a_{2,3} + \frac{1}{2}a_{2,4} + \frac{1}{2}a_{2,6} - \frac{1}{2}a_{3,2} - a_{3,3} - a_{3,4} - \frac{1}{2}a_{3,5} + \frac{1}{2}a_{4,2} + a_{4,4} + \frac{1}{2}a_{4,5} + a_{4,6} + \frac{1}{2}a_{5,3} + \frac{1}{2}a_{5,4} + a_{5,5} + a_{5,6} + a_{6,2} + a_{6,3} + a_{6,4} + a_{6,5} - 2a_{6,6} = 333$$

$$a_{2,5} - a_{2,6} + a_{3,4} - a_{3,6} + a_{4,3} - a_{4,6} + a_{5,2} - a_{5,6} - a_{6,2} - a_{6,3} - a_{6,4} - a_{6,5} - 2a_{6,6} = -111$$

$$a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + a_{3,4} + a_{3,5} + a_{3,6} = 111$$

$$a_{4,1} + a_{4,2} + a_{4,3} + a_{4,4} + a_{4,5} + a_{4,6} = 111$$

$$a_{5,1} + a_{5,2} + a_{5,3} + a_{5,4} + a_{5,5} + a_{5,6} = 111$$

$$a_{6,1} + a_{6,2} + a_{6,3} + a_{6,4} + a_{6,5} + a_{6,6} = 111$$

Sistem Persamaan Linear (SPL) diatas ekivalen dengan sistem persamaan berikut:

$$a_{1,1} = \frac{1}{2}a_{2,3} + \frac{1}{2}a_{2,4} + a_{2,6} + \frac{1}{2}a_{3,2} + \frac{1}{2}a_{3,5} + a_{3,6} + \frac{1}{2}a_{4,2} + \frac{1}{2}a_{4,5} + a_{4,6} + \frac{1}{2}a_{5,3} + \frac{1}{2}a_{5,4} + a_{5,6} + a_{6,2} + a_{6,3} + a_{6,4} + a_{6,5} + a_{6,6} - 222$$

$$a_{1,2} = \frac{1}{2}a_{2,3} + \frac{1}{2}a_{2,4} + a_{2,6} - \frac{1}{2}a_{3,2} + a_{3,3} + \frac{1}{2}a_{3,5} + a_{3,6} - \frac{1}{2}a_{4,2} + a_{4,4} + \frac{1}{2}a_{4,5} + a_{4,6} + \frac{1}{2}a_{5,3} + \frac{1}{2}a_{5,4} + a_{5,5} + a_{5,6} + a_{6,3} + a_{6,4} + a_{6,5} + 2a_{6,6} - 222$$

$$a_{1,3} = -a_{2,3} - a_{3,3} - a_{4,3} - a_{5,3} - a_{6,3} + 111$$

$$a_{1,4} = -a_{2,4} - a_{3,4} - a_{4,4} - a_{5,4} - a_{6,4} + 111$$

$$a_{1,5} = -a_{2,6} + a_{3,4} - a_{3,5} - a_{3,6} + a_{4,3} - a_{4,5} - a_{4,6} + a_{5,2} - a_{5,5} - a_{5,6} - a_{6,2} - a_{6,3} - a_{6,4} - 2a_{6,5} - 2a_{6,6} + 222$$

$$a_{1,6} = a_{2,6} - a_{3,6} - a_{4,6} - a_{5,6} - a_{6,6} + 111$$

$$a_{2,1} = -\frac{1}{2}a_{2,3} - \frac{1}{2}a_{2,4} - a_{2,6} + \frac{1}{2}a_{3,2} + a_{3,3} + a_{3,4} + \frac{1}{2}a_{3,5} + \frac{1}{2}a_{4,2} + a_{4,3} + a_{4,4} + \frac{1}{2}a_{4,5} + \frac{1}{2}a_{5,2} + \frac{1}{2}a_{5,3} + \frac{1}{2}a_{5,4} + a_{5,5} - 111$$

$$a_{2,2} = -\frac{1}{2}a_{2,3} - \frac{1}{2}a_{2,4} - \frac{1}{2}a_{2,6} + \frac{1}{2}a_{3,2} + a_{3,3} + a_{3,4} + \frac{1}{2}a_{3,5} - \frac{1}{2}a_{4,2} - a_{4,4} - \frac{1}{2}a_{4,5} - a_{4,6} - \frac{1}{2}a_{5,3} - \frac{1}{2}a_{5,4} - a_{5,5} - a_{5,6} - a_{6,2} - a_{6,3} - a_{6,4} - a_{6,5} + 2a_{6,6} + 333$$

$$a_{2,5} = a_{2,6} + a_{3,4} + a_{3,6} + a_{4,3} + a_{4,6} - a_{5,2} + a_{5,6} + a_{6,2} + a_{6,3} + a_{6,4} + a_{6,5} + 2a_{6,6} - 111$$

$$a_{3,1} = -a_{3,2} - a_{3,3} - a_{3,4} - a_{3,5} - a_{3,6} + 111$$

$$a_{4,1} = -a_{4,2} - a_{4,3} - a_{4,4} - a_{4,5} - a_{4,6} + 111$$

$$a_{5,1} = -a_{5,2} - a_{5,3} - a_{5,4} - a_{5,5} - a_{5,6} + 111$$

$$a_{6,1} = -a_{6,2} - a_{6,3} - a_{6,4} - a_{6,5} - a_{6,6} + 111$$

Dari Sistem Persamaan Linear (SPL) yang sudah disederhanakan tersebut, maka akan didapatkan nilai-nilai peubah yang memungkinkan memberikan solusi untuk penyelesaian *Magic Square* dengan ukuran 6×6.

Sistem Persamaan Linear (SPL) ini memperlihatkan bahwa terdapat 13 peubah yang bergantung pada peubah lain $(a_{1,1}; a_{1,2}\ ; a_{1,3}\ ; a_{1,4}\ ; a_{1,5}\ ; a_{1,6}\ ; a_{2,1}\ ; a_{2,2}\ ; a_{2,5}\ ; a_{3,1}\ ; a_{1,1}\ ; a_{1,1}\ ; a_{1,1})$ yang memungkinkan memberikan solusi untuk *Magic Square* berukuran 7×7 adalah $(a_{1,1} = 6;\ a_{1,2} = 32;\ a_{1,3} = 3;\ a_{1,4} = 34;\ a_{1,5} = 35;\ a_{1,6} = 1;\ a_{2,1} = 7;\ a_{2,2} = 11;\ a_{2,5} = 8;\ a_{3,1} = 19;\ a_{4,1} = 18;\ a_{5,1} = 25;\ a_{6,1} = 36)$ dan terdapat 23 peubah parameter.

4.2. Penyelesaian untuk $n = 7$

a. Menentukan bentuk umum dari *Magic Square*, dan bilangan *Magic.*

Dalam penelitian ini peniliti akan menentukan solusi umum dari Magic Square yang berukuran 7×7. Sehingga *Magic Square*nya secara umum adalah:

Tabel 4.2. Bentuk umum *Magic Square* 7×7

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	$a_{1,6}$	$a_{1,7}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	$a_{2,6}$	$a_{2,7}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	$a_{3,6}$	$a_{3,7}$
$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$	$a_{4,6}$	$a_{4,7}$
$a_{5,1}$	$a_{5,2}$	$a_{5,3}$	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$	$a_{5,6}$	$a_{5,7}$
$a_{6,1}$	$a_{6,2}$	$a_{6,3}$	$a_{6,4}$	$a_{6,5}$	$a_{6,6}$	$a_{6,7}$
$a_{7,1}$	$a_{7,2}$	$a_{7,3}$	$a_{7,4}$	$a_{7,5}$	$a_{7,6}$	$a_{7,7}$

Dari tabel 4.2. Bentuk umum *Magic Square* diatas maka untuk menentukan bilangan *Magic* untuk *Magic Square* tersebut adalah:

1. Untuk menghitung jumlah baris:

$$a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + a_{1,4} + a_{1,5} + a_{1,6} + a_{1,7} = \sum_{j=1}^{7} a_{1,j}$$

$$a_{2,1} + a_{2,2} + a_{2,3} + a_{2,4} + a_{2,5} + a_{2,6} + a_{2,7} = \sum_{j=1}^{7} a_{2,j}$$

$$a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + a_{3,4} + a_{3,5} + a_{3,6} + a_{3,7} = \sum_{j=1}^{7} a_{3,j}$$

$$a_{4,1} + a_{4,2} + a_{4,3} + a_{4,4} + a_{4,5} + a_{4,6} + a_{4,7} = \sum_{j=1}^{7} a_{4,j}$$

$$a_{5,1} + a_{5,2} + a_{5,3} + a_{5,4} + a_{5,5} + a_{5,6} + a_{5,7} = \sum_{j=1}^{7} a_{5,j}$$

$$a_{6,1} + a_{6,2} + a_{6,3} + a_{6,4} + a_{6,5} + a_{6,6} + a_{6,7} = \sum_{j=1}^{7} a_{6,j}$$

$$a_{7,1} + a_{7,2} + a_{7,3} + a_{7,4} + a_{7,5} + a_{7,6} + a_{7,7} = \sum_{j=1}^{7} a_{7,j}$$

Sehingga,

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{7} a_{1,j} = \sum_{j=1}^{7} a_{2,j} = \sum_{j=1}^{7} a_{3,j} = \sum_{j=1}^{7} a_{4,j} = \sum_{j=1}^{7} a_{5,j} = \sum_{j=1}^{7} a_{6,j} = \sum_{j=1}^{7} a_{7,j} = m} \qquad (1)$$

2. Untuk menghitung jumlah kolom:

$$a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} + a_{4,1} + a_{5,1} + a_{6,1} + a_{7,1} = \sum_{i=1}^{7} a_{i,1}$$

$$a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} + a_{4,2} + a_{5,2} + a_{6,2} + a_{7,2} = \sum_{i=1}^{7} a_{i,2}$$

$$a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} + a_{4,3} + a_{5,3} + a_{6,3} + a_{7,3} = \sum_{i=1}^{7} a_{i,3}$$

$$a_{1,4} + a_{2,4} + a_{3,4} + a_{4,4} + a_{5,4} + a_{6,4} + a_{7,4} = \sum_{i=1}^{7} a_{i,4}$$

$$a_{1,5} + a_{2,5,} + a_{3,5} + a_{4,5} + a_{5,5} + a_{6,5} + a_{7,5} = \sum_{i=1}^{7} a_{i,5}$$

$$a_{1,6} + a_{2,6} + a_{3,6} + a_{4,6} + a_{5,6} + a_{6,6} + a_{7,6} = \sum_{i=1}^{7} a_{i,6}$$

$$a_{1,7} + a_{2,7} + a_{3,7} + a_{4,7} + a_{5,7} + a_{6,7} + a_{7,7} = \sum_{i=1}^{7} a_{i,7}$$

Sehingga,

$$\sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{a_{i,1}} = \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{a_{i,2}} = \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{a_{i,3}} = \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{a_{i,4}} = \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{a_{i,5}} = \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{a_{i,6}} = \sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{a_{i,7}} = \boldsymbol{m} \qquad (2)$$

3. Untuk menghitung jumlah diagonalnya:

$$a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} + a_{4,4} + a_{5,5} + a_{6,6} + a_{7,7} = \sum_{i=1}^{7} a_{i,i}$$

$$a_{7,1} + a_{6,2} + a_{5,3} + a_{4,4} + a_{3,5} + a_{2,6} + a_{1,7} = \sum_{j=1}^{7} a_{(7-j)+1\,,j}$$

Sehingga,

$$\sum_{i=1}^{7} \boldsymbol{a_{i,i}} = \sum_{j=1}^{7} \boldsymbol{a}(_{\boldsymbol{7-j})+1\,,j} = \boldsymbol{m} \qquad (3)$$

Dari beberapa notasi diatas dapat dituliskan sebagai berikut. Jika seluruh elemen dari *Magic Square* dijumlahkan, maka:

$$m = \frac{1}{2}n(n^2+1) = \frac{1}{2}7(7^2+1) = \frac{1}{2}7(49+1) = \frac{7}{2}(50) = 175$$

Jadi untuk jumlah semua baris, kolom dan kedua diagonalnya haruslah berjumlah 175. Kemudian untuk menentukan masing-masing bilangan magic square untuk ukuran 7×7 dimana ada sebanyak 49 bilangan akan digunakan prinsip Sistem Persamaan Linear (SPL).

b. Menentukan bentuk umum Sistem Persamaan Linear dari *Magic Square*.

Dengan menjabarkan persamaan (1), (2), dan (3), maka bentuk diperoleh bentuk umum dari Sistem Persamaan Linear untuk *Magic Square* ukuran 7×7.

Untuk lebih lengkapnya Sistem Persamaan Linear (SPL) dari persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}+a_{1,4}+a_{1,5}+a_{1,6}+a_{1,7}=\mathbf{175}\\
a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}+a_{2,4}+a_{2,5}+a_{2,6}+a_{2,7}=\mathbf{175}\\
a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3}+a_{3,4}+a_{3,5}+a_{3,6}+a_{3,7}=\mathbf{175}\\
a_{4,1}+a_{4,2}+a_{4,3}+a_{4,4}+a_{4,5}+a_{4,6}+a_{4,7}=\mathbf{175}\\
a_{5,1}+a_{5,2}+a_{5,3}+a_{5,4}+a_{5,5}+a_{5,6}+a_{5,7}=\mathbf{175}\\
a_{6,1}+a_{6,2}+a_{6,3}+a_{6,4}+a_{6,5}+a_{6,6}+a_{6,7}=\mathbf{175}\\
a_{7,1}+a_{7,2}+a_{7,3}+a_{7,4}+a_{7,5}+a_{7,6}+a_{7,7}=\mathbf{175}\\
a_{1,1}+a_{2,1}+a_{3,1}+a_{4,1}+a_{5,1}+a_{6,1}+a_{7,1}=\mathbf{175}\\
a_{1,2}+a_{2,2}+a_{3,2}+a_{4,2}+a_{5,2}+a_{6,2}+a_{7,2}=\mathbf{175}\\
a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3}+a_{4,3}+a_{5,3}+a_{6,3}+a_{7,3}=\mathbf{175}\\
a_{1,4}+a_{2,4}+a_{3,4}+a_{4,4}+a_{5,4}+a_{6,4}+a_{7,4}=\mathbf{175}\\
a_{1,5}+a_{2,5,}+a_{3,5}+a_{4,5}+a_{5,5}+a_{6,5}+a_{7,5}=\mathbf{175}\\
a_{1,6}+a_{2,6}+a_{3,6}+a_{4,6}+a_{5,6}+a_{6,6}+a_{7,6}=\mathbf{175}\\
a_{1,7}+a_{2,7}+a_{3,7}+a_{4,7}+a_{5,7}+a_{6,7}+a_{7,7}=\mathbf{175}\\
a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}+a_{4,4}+a_{5,5}+a_{6,6}+a_{7,7}=\mathbf{175}\\
a_{7,1}+a_{6,2}+a_{5,3}+a_{4,4}+a_{3,5}+a_{2,6}+a_{1,7}=\mathbf{175}
\end{array}\right. \tag{4}$$

c. Menentukan bentuk umum Matriks Sistem Persamaan Linear (SPL) dari *Magic Square.*

Berdasarkan persamaan (4) diatas kita dapat membentuk matriks yang diperluas sebagai berikut:

$$\left|\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc||c}
1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&175\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&175\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&175\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&175\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&175\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&175\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&175\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&175\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&175\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&175\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&175\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&175\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&175\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&175\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&175\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&175
\end{array}\right|$$

d. Melakukan Operasi Baris Elementer (OBE) terhadap matriks Sistem Persamaan Linear (SPL) yang telah terbentuk.

Setelah didapatkan bentuk umum matriks dari Magic Square ukuran 7×7, maka tahapan selanjutnya yaitu menentukan eselon baris dengan menggunakan operasi baris elementer. Untuk memudahkan proses operasi baris elementer, penulis menggunakan bantuan *microsoft office excel v.2010.*

Setelah melakukan beberapa tahapan operasi baris elementer, didapatkan bentuk eselon baris seperti berikut:

1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.5	-0.5	-0.5	0	-1	0	-0.5	0	-0.5	0	-0.5	-1	0	-0.5	-0.5	0.5	-0.5	-0.5	-1	0	-0.5	0	-0.5	0	-0.5	-1	0	0	-0.5	-0.5	-0.5	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-437.5
0	1	0	0	0	0	0	0	0	-0.5	-0.5	-0.5	0	-1	0	0.5	-1	-0.5	0	-0.5	-1	0	0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-1	0	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	-1	0	1	-0.5	-0.5	-0.5	-1	-1	0	0	-1	-1	-1	-1	-2	-437.5
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	175
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	175
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	175
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	-1	0	1	1	0	0	-1	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	2	2	350
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	175
0	0	0	0	0	0	0	1	0.5	0.5	0.5	0.5	0	1	0	-0.5	-1	-0.5	-1	-0.5	0.5	0	-0.5	-0.5	-1.5	-0.5	-0.5	0	0	-0.5	-1	-0.5	-1	-0.5	0	0	-1	-0.5	-0.5	-0.5	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	-262.5
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.5	0.5	0.5	0	1	0	0.5	1	0.5	0	0.5	0.5	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0.5	0	0.5	1	0.5	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5	1	0.5	0	1	1	1	1	1	2	1225/2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-2	-175
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	175
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	175
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	175
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	175
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	175
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

e. Menyusun kembali ke bentuk Sistem Persamaan Linear dari hasil Operasi Baris Elementer (OBE).

Setelah diperoleh bentuk eselon baris dari hasil operasi baris elementer, hasil tersebut diterjemahkan/disusun kembali ke dalam bentuk Sistem Persamaan Linear (SPL). Sehingga dapat diperoleh persamaan sebagai berikut:

$a_{1,1} - \frac{1}{2}a_{2,3} - \frac{1}{2}a_{2,4} - \frac{1}{2}a_{2,5} - \frac{1}{2}a_{2,7} - \frac{1}{2}a_{3,2} - \frac{1}{2}a_{3,4} - \frac{1}{2}a_{3,5} - \frac{1}{2}a_{3,6} - a_{3,7} - \frac{1}{2}a_{4,2} - \frac{1}{2}a_{4,4} - \frac{1}{2}a_{4,5} - \frac{1}{2}a_{4,6} - \frac{1}{2}a_{4,7} - \frac{1}{2}a_{5,2} - \frac{1}{2}a_{5,4} - \frac{1}{2}a_{5,6} - a_{5,7} - \frac{1}{2}a_{6,3} - \frac{1}{2}a_{6,4} - \frac{1}{2}a_{6,5} - a_{7,1} - a_{7,2} - a_{7,3} - a_{7,4} - a_{7,5} - a_{7,6} - a_{7,7} = -\frac{875}{2}$

$a_{1,2} - \frac{1}{2}a_{2,3} - \frac{1}{2}a_{2,4} - \frac{1}{2}a_{2,5} - a_{2,7} + \frac{1}{2}a_{3,2} - a_{3,3} - \frac{1}{2}a_{3,4} - \frac{1}{2}a_{3,6} - a_{3,7} + \frac{1}{2}a_{4,2} - \frac{1}{2}a_{4,3} - \frac{1}{2}a_{4,4} - \frac{1}{2}a_{4,5} - \frac{1}{2}a_{4,6} - a_{4,7} + \frac{1}{2}a_{5,2} - \frac{1}{2}a_{5,4} - a_{5,4} - \frac{1}{2}a_{5,6} - a_{5,7} + a_{6,2} - \frac{1}{2}a_{6,3} - \frac{1}{2}a_{6,4} - \frac{1}{2}a_{6,5} - a_{6,6} - a_{6,7} - a_{7,3} - a_{7,4} - a_{7,5} - a_{7,6} - 2a_{7,7} = -\frac{875}{2}$

$a_{1,3} + a_{2,3} + a_{3,3} + a_{4,3} + a_{5,3} + a_{6,3} + a_{7,3} = 175$

$a_{1,4} + a_{2,4} + a_{3,4} + a_{4,4} + a_{5,4} + a_{6,4} + a_{7,4} = 175$

$a_{1,5} + a_{2,5} + a_{3,5} + a_{4,5} + a_{5,5} + a_{6,5} + a_{7,5} = 175$

$a_{1,6} + a_{2,7} - a_{3,5} + a_{3,6} + a_{3,7} - a_{4,4} + a_{4,6} + a_{4,7} - a_{5,3} + a_{5,6} + a_{5,7} - a_{6,2} + a_{6,6} + a_{6,7} + a_{7,2} + a_{7,3} + a_{7,4} + a_{7,5} + 2a_{7,6} + 2a_{7,7} = 350$

$a_{1,7} + a_{2,7} + a_{3,7} + a_{4,7} + a_{5,7} + a_{6,7} + a_{7,7} = 175$

$a_{2,1} + \frac{1}{2}a_{2,3} + \frac{1}{2}a_{2,4} + \frac{1}{2}a_{2,5} + \frac{1}{2}a_{2,7} - \frac{1}{2}a_{3,2} - a_{3,3} - \frac{1}{2}a_{3,4} - a_{3,5} - \frac{1}{2}a_{3,6} - \frac{1}{2}a_{4,2} - \frac{1}{2}a_{4,3} - \frac{3}{2}a_{4,4} - \frac{1}{2}a_{4,5} - \frac{1}{2}a_{4,6} - \frac{1}{2}a_{5,2} - a_{5,3} - \frac{1}{2}a_{5,4} - a_{5,5} - \frac{1}{2}a_{5,6} - a_{6,2} - \frac{1}{2}a_{6,3} - \frac{1}{2}a_{6,4} - \frac{1}{2}a_{6,5} - a_{6,6} = -\frac{525}{2}$

$a_{2,2} + \frac{1}{2}a_{2,3} + \frac{1}{2}a_{2,4} + \frac{1}{2}a_{2,5} + \frac{1}{2}a_{2,7} + \frac{1}{2}a_{3,2} + a_{3,3} + \frac{1}{2}a_{3,4} + + \frac{1}{2}a_{3,5} + \frac{1}{2}a_{3,6} + a_{3,7} + \frac{1}{2}a_{4,2} + \frac{1}{2}a_{4,3} + \frac{1}{2}a_{4,4} + \frac{1}{2}a_{4,5} + \frac{1}{2}a_{4,6} + \frac{1}{2}a_{4,7} + \frac{1}{2}a_{5,2} + \frac{1}{2}a_{5,4} + a_{5,5} + \frac{1}{2}a_{5,6} + a_{5,7} + \frac{1}{2}a_{6,2} + \frac{1}{2}a_{6,3} + \frac{1}{2}a_{6,4} + \frac{1}{2}a_{6,5} + a_{6,6} + a_{6,7} + a_{7,1} + a_{7,2} + a_{7,3} + a_{7,4} + a_{7,5} + a_{7,6} + 2a_{7,7} = \frac{1225}{2}$

$a_{2,6} - a_{2,7} + a_{3,5} - a_{3,7} + a_{4,4} - a_{4,7} + a_{5,3} - a_{5,7} + a_{6,2} - a_{6,7} - a_{7,2} - a_{7,3} - a_{7,4} - a_{7,5} - a_{7,6} + 2a_{7,7} = -175$

$a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3} + a_{3,4} + a_{3,5} + a_{3,6} + a_{3,7} = 175$

$a_{4,1} + a_{4,2} + a_{4,3} + a_{4,4} + a_{4,5} + a_{4,6} + a_{4,7} = 175$

$a_{5,1} + a_{5,2} + a_{5,3} + a_{5,4} + a_{5,5} + a_{5,6} + a_{5,7} = 175$

$a_{6,1} + a_{6,2} + a_{6,3} + a_{6,4} + a_{6,5} + a_{6,6} + a_{6,7} = 175$

$a_{7,1} + a_{7,2} + a_{7,3} + a_{7,4} + a_{7,5} + a_{7,6} + a_{7,7} = 175$

Sistem Persamaan Linear (SPL) diatas ekivalen dengan sistem persamaan berikut:

$a_{1,1} = -\frac{875}{2} - \frac{1}{2}a_{2,3} - \frac{1}{2}a_{2,4} - \frac{1}{2}a_{2,5} - \frac{1}{2}a_{2,7} - \frac{1}{2}a_{3,2} - \frac{1}{2}a_{3,4} - \frac{1}{2}a_{3,5} - \frac{1}{2}a_{3,6} - a_{3,7} - \frac{1}{2}a_{4,2} - \frac{1}{2}a_{4,4} - \frac{1}{2}a_{4,5} - \frac{1}{2}a_{4,6} - \frac{1}{2}a_{4,7} - \frac{1}{2}a_{5,2} - \frac{1}{2}a_{5,4} - \frac{1}{2}a_{5,6} - a_{5,7} - \frac{1}{2}a_{6,3} - \frac{1}{2}a_{6,4} - \frac{1}{2}a_{6,5} - a_{7,1} - a_{7,2} - a_{7,3} - a_{7,4} - a_{7,5} - a_{7,6} - a_{7,7}$

$a_{1,2} = -\frac{1}{2}a_{2,3} - \frac{1}{2}a_{2,4} - \frac{1}{2}a_{2,5} - a_{2,7} + \frac{1}{2}a_{3,2} - a_{3,3} - \frac{1}{2}a_{3,4} - \frac{1}{2}a_{3,6} - a_{3,7} + \frac{1}{2}a_{4,2} - \frac{1}{2}a_{4,3} - \frac{1}{2}a_{4,4} - \frac{1}{2}a_{4,5} - \frac{1}{2}a_{4,6} - a_{4,7} + \frac{1}{2}a_{5,2} - \frac{1}{2}a_{5,4} - a_{5,4} - \frac{1}{2}a_{5,6} - a_{5,7} + a_{6,2} - \frac{1}{2}a_{6,3} - \frac{1}{2}a_{6,4} - \frac{1}{2}a_{6,5} - a_{6,6} - a_{6,7} - a_{7,3} - a_{7,4} - a_{7,5} - a_{7,6} - 2a_{7,7} - \frac{875}{2}$

$a_{1,3} = -a_{2,3} - a_{3,3} - a_{4,3} - a_{5,3} - a_{6,3} - a_{7,3} + 175$

$a_{1,4} = -a_{2,4} - a_{3,4} - a_{4,4} - a_{5,4} - a_{6,4} - a_{7,4} + 175$

$a_{1,5} = -a_{2,5} - a_{3,5} - a_{4,5} - a_{5,5} - a_{6,5} - a_{7,5} + 175$

$a_{1,6} = -a_{2,7} + a_{3,5} - a_{3,6} - a_{3,7} + a_{4,4} - a_{4,6} - a_{4,7} + a_{5,3} - a_{5,6} - a_{5,7} + a_{6,2} - a_{6,6} - a_{6,7} - a_{7,2} - a_{7,3} - a_{7,4} - a_{7,5} - 2a_{7,6} - 2a_{7,7} + 350$

$a_{1,7} = -a_{2,7} - a_{3,7} - a_{4,7} - a_{5,7} - a_{6,7} - a_{7,7} + 175$

$a_{2,1} = -\frac{1}{2}a_{2,3} - \frac{1}{2}a_{2,4} - \frac{1}{2}a_{2,5} - \frac{1}{2}a_{2,7} + \frac{1}{2}a_{3,2} + a_{3,3} + \frac{1}{2}a_{3,4} + a_{3,5} + \frac{1}{2}a_{3,6} + \frac{1}{2}a_{4,2} + \frac{1}{2}a_{4,3} + \frac{3}{2}a_{4,4} + \frac{1}{2}a_{4,5} + \frac{1}{2}a_{4,6} + \frac{1}{2}a_{5,2} + a_{5,3} + \frac{1}{2}a_{5,4} + a_{5,5} + \frac{1}{2}a_{5,6} + a_{6,2} + \frac{1}{2}a_{6,3} + \frac{1}{2}a_{6,4} + \frac{1}{2}a_{6,5} + a_{6,6} + \frac{525}{2}$

$$a_{2,2} = -\frac{1}{2}a_{2,3} - \frac{1}{2}a_{2,4} - \frac{1}{2}a_{2,5} - \frac{1}{2}a_{2,7} - \frac{1}{2}a_{3,2} - a_{3,3} - \frac{1}{2}a_{3,4} - \frac{1}{2}a_{3,5} - \frac{1}{2}a_{3,6} - a_{3,7} - \frac{1}{2}a_{4,2} - \frac{1}{2}a_{4,3} - \frac{1}{2}a_{4,4} - \frac{1}{2}a_{4,5} - \frac{1}{2}a_{4,6} - \frac{1}{2}a_{4,7} - \frac{1}{2}a_{5,2} - \frac{1}{2}a_{5,4} - a_{5,5} - \frac{1}{2}a_{5,6} - a_{5,7} - \frac{1}{2}a_{6,2} - \frac{1}{2}a_{6,3} - \frac{1}{2}a_{6,4} - \frac{1}{2}a_{6,5} - a_{6,6} - a_{6,7} - a_{7,1} - a_{7,2} - a_{7,3} - a_{7,4} - a_{7,5} - a_{7,6} - 2a_{7,7} + \frac{1225}{2}$$

$$a_{2,6} = a_{2,7} - a_{3,5} + a_{3,7} - a_{4,4} + a_{4,7} - a_{5,3} + a_{5,7} - a_{6,2} + a_{6,7} + a_{7,2} + a_{7,3} + a_{7,4} + a_{7,5} + a_{7,6} + 2a_{7,7} = -175$$

$$a_{3,1} = -a_{3,2} - a_{3,3} - a_{3,4} - a_{3,5} - a_{3,6} - a_{3,7} + 175$$

$$a_{4,1} = -a_{4,2} - a_{4,3} - a_{4,4} - a_{4,5} - a_{4,6} - a_{4,7} + 175$$

$$a_{5,1} = -a_{5,2} - a_{5,3} - a_{5,4} - a_{5,5} - a_{5,6} - a_{5,7} + 175$$

$$a_{6,1} = -a_{6,2} - a_{6,3} - a_{6,4} - a_{6,5} - a_{6,6} - a_{6,7} + 175$$

$$a_{7,1} = -a_{7,2} - a_{7,3} - a_{7,4} - a_{7,5} - a_{7,6} - a_{7,7} + 175$$

Dari Sistem Persamaan Linear (SPL) yang sudah disederhanakan tersebut, maka akan didapatkan nilai-nilai peubah yang memungkinkan memberikan solusi untuk penyelesaian *Magic Square* dengan ukuran 7×7.

Sistem Persamaan Linear (SPL) ini memperlihatkan bahwa terdapat 15 peubah yang bergantung pada peubah lain ($a_{1,1};\ a_{1,2}; a_{1,3}; a_{1,4}; a_{1,5};\ a_{1,6};\ a_{2,1}; a_{2,2}; a_{2,4}; a_{2,6}; a_{3,1}; a_{4,1};\ a_{5,1}; a_{6,1};$ dan $a_{7,1}$)

f. Mencari penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan prinsip solusi umum Sistem Persamaan Linear (SPL).

Setelah hasil operasi baris elementer diterjemahkan kembali ke sistem persamaan Linear (SPL) dan diperoleh beberapa peubah. Dimana sistem persamaan linear (SPL) tersebut akan memperlihatkan beberapa peubah yang bergantung terhadap peubah lain, dan beberapa peubah parameter. Beberapa peubah parameter ini akan sulit melakukan pengujian untuk semua permutasi dari nilai-nilainya. Dalam proses pencarian solusi ini, proses yang digunakan untuk mendapatkan banyaknya solusi *Magic Square* akan sangat sulit jika dikerjakan dengan cara manual, sehingga untuk mendapatkan solusi dari persamaan tersebut dibutuhkan bantuan aplikasi yang dapat menentukan masing-masing nilai peubah dari Sistem Persamaan Linear (SPL) itu. Oleh karena itu, yang memungkinkan memberikan solusi untuk *Magic Square* berukuran 7×7 adalah $(a_{1,1} = 30;\ a_{1,2} = 39;\ a_{1,3} = 48;\ a_{1,4} = 1;\ a_{1,5} = 10;\ a_{1,6} = 19;\ a_{1,7} = 28; a_{2,1} = 38;\ a_{2,2} = 47;\ a_{2,4} = 9;\ a_{2,6} = 27; a_{3,1} = 46;\ a_{4,1} = 5;\ a_{5,1} = 13;\ a_{6,1} = 21; a_{7,1} = 22)$.

Adapun output dari penggunaan Mathematica 8.0, menghasilkan solusi yang dapat dijabarkan sebagai berikut:

2. Mendapatkan solusi dari sistem persamaan linear (SPL) dalam penyelesaian *Magic Square* dengan program Mathematica 8.0 sampai dengan berordo *nxn*

1. Program Mathematica 8.0

MagicSquare[n_,pos_]: = Module[{},

m = Table[0,{i,1,n},{j,1,n}];

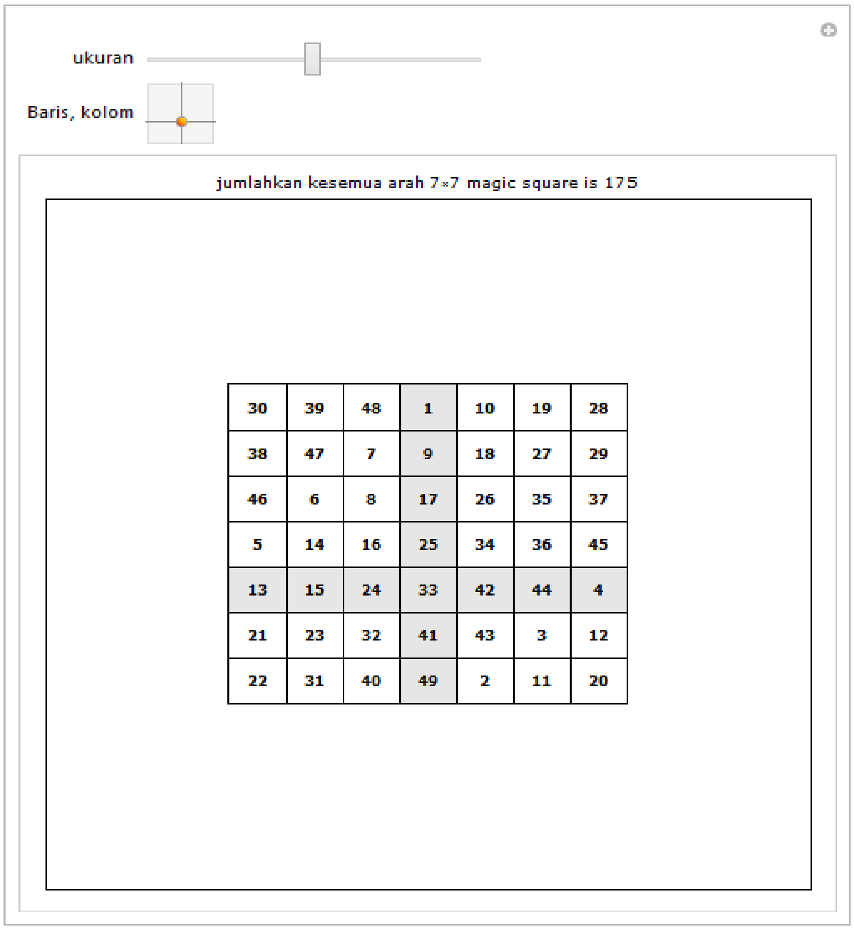
Table[

If[count == 1, i = 1; $j = \frac{(n+1)}{2}$; m [[i,j]] = 1,

i = i – 1; j = j + 1; If [(i = = 0 && j == n + 1), i = i +2; j = j - 1,

```
If[i == 0, i = n];

If[j == n + 1, j = 1]];

If[m[[i, j]] ≠ 0, i = i + 2; j = j − 1];

m[[i, j]] = count], {count, 1, n^2}];

Grid[

{{Grid[m, Alignment → {Center, Center}, Dividers → All, ItemSize → {3,2.5}, ItemStyle → {Bold, Black},

Background → {{Automatic, {pos[[1]] → GrayLevel[.9]}}, {Automatic, {(n − pos[[2]] + 1) →   GrayLevel[.9]}}}]}}, Alignment → {Center, Center}, ItemSize → {50,45}, Frame → True]

];

Manipulate[pos = {autorunposX, autorunposY};

Labeled[Style[MagicSquare[n, pos], "Label"], Style["jumlahkan kesemua arah" <> ToString[n] <> " × " <>   ToString[n] <> "magic square is" <> ToString[n(n^2+1)/2], "Label", Small], Top], {{n, 3, "ukuran"},1,13,2, ControlType → Slider},

{{pos, {3,3}, "Baris, kolom"},


Slider2D[Dynamic[pos, (pos = #; {autorunposX, autorunposY} = #)&, DefaultStyle → {"Slider2D", Background →     White}], {{1,1}, {n, n}, {1,1}}, ImageSize → Tiny]&},


{{autorunposX, 3}, 1, n, 1, ControlType → None}, {{autorunposY, 3}, 1, n, 1, ControlType → None}AutorunSequencing → {{1,5}, {3,2}, {4,2}}, SaveDefinitions → True]
```

2. Output



30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

B. *Pembahasan*

3. Untuk mendapatkan penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan solusi sistem persamaan linear (SPL) sampai dengan berordo 7×7

Pada penelitian ini, penulis menentukan bentuk umum dari ordo 6×6 dan 7×7 yang di dalamnya ada baris, kolom, diagonal, untuk menggunakan Sistem Persamaan Linear (SPL) dalam menentukan bilangan *Magic*. Dalam menentukan bilangan *Magic* dengan hasil sistem persamaan linear (SPL) yang berordo 6×6 dan 7×7 tidak dapat diselesaikan dengan perhitungan secara manual yang berukuran tinggi. Maka dalam menyelesaikan harus menggunakan bantuan software Mathematica 8.0 untuk menghasilkan solusi persamaan dari bilangan *Magic*. Untuk mendapatkan solusinya penulis penginput hasil sistem persamaan linear (SPL) yang dihasilkan dari langkah sebelumnya yaitu OBE.

Pada penyelesaiannya, penulis terlebih dahulu menentukan bentuk umum ordo 7×7 kemudian menguraikan kedalam bentuk sistem persamaan linear (SPL) dengan memiliki 7 baris, 7 kolom, dan 2 diagonal. Kemudian untuk nilai baris, kolom, diagonal terdapat 3 persamaan yaitu mendapatkan jumlah baris, kolom dan diagonal dari bentuk umum *Magic Square* 7×7. Untuk menentukan nilai *m* adalah $m = \frac{1}{2}n^2(n^2 + 1)$,setelah mendapatkan nilai *m* haruslah jumlah baris, kolom, dan diagonalnya berjumlah 175. Kemudian untuk menentukan masing-masing bilangan *Magic Square* untuk ordo 7×7 dimana ada sebanyak 49 bilangan yang akan digunakan untuk menghasilkan solusi sistem persamaan linear (SPL). Langkah selanjutnya adalah menentukan bentuk umum sistem persamaan linear (SPL) dari *Magic Square* dengan menjabarkan persamaan-persamaan yang sudah diperoleh dari jumlah baris, kolom, dan diagonal, didapatkan persamaan ke empat dari hasil persamaan sebelumnya. Kemudian persamaan ke empat dibentuk ke dalam matriks yang diperluas untuk melakukan OBE terhadap matriks SPL yang telah terbentuk. Untuk memudahkan proses OBE, penulis menggunakan *microsoft office excel v.2010* dan Mathematica 8.0. Setelah melakukan beberapa tahapan OBE terdapat beberapa iterasi untuk mendapatkan eselon baris, kemudian hasil OBE di cocokkan dengan hasil dari software Mathematica 8.0 yang sudah didapatkan dari bantuan *microsoft* *office excel v.2010*. Hasil tersebut disusun kembali kedalam bentuk SPL kemudian persamaannya akan didapatkan nilai-nilai peubah yang memungkinkan memberikan solusi untuk penyelesaian *Magic Square* dengan ordo 7×7. Sistem persamaan linear (SPL) memperlihatkan 15 peubah yang bergantung pada peubah lain dan peubah parameter terdapat 34 peubah. Beberapa peubah itu dibuktikan untuk mendapatkan nilai dari 49 peubah dan untuk ordo 7×7 penulis menggunakan bantuan software Mathematica 8.0 dengan menghasilkan bilangan *Magic Square*, tetapi untuk mendapatkan solusi dari prinsip SPL untuk penyelesaian *Magic Square* yang berukuran besar tidak bisa menghasilkan secara manual karena memiliki beberapa banyak peubah. Jadi solusi itu bisa didapatkan melalui bantuan software Mathematica 8.0, untuk menghasilkan solusinya penulis mengiput persamaan dari sistem persamaan linear (SPL) ordo 7×7 untuk mendapatkan hasil akhirnya. Beberapa lama menjalankan program ini selalu menghasilkan nilai 0 dan negatif dan tidak berhenti menghasilkan persamaan yang benar. Didalam *Magic Square* angka harus bernilai positif dan bukan bernilai 0. Solusinya ada tetapi lebih dari satu persamaan sampai terhingga. Penulis hanya mendapatkan bilangan *Magic* dengan menggunakan pola untuk menentukan penempatan bilangan *Magic Square* tersebut.

4. Untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan linear (SPL) dalam penyelesaian *Magic Square* dengan software Mathematica 8.0 sampai dengan berordo $n \times n$

Pada penelitian ini, penulis hanya bisa memunculkan bilangan *Magic Square* 13×13 dengan menggunakan software Mahtematica 8.0. Pada program ini tidak menginput ordo berapa yang diinginkan tetapi menggunakan fungsi *manipulate* (menggeser ke kiri atau ke kanan). Hasilnya akan di bentuk dengan perintah yang dilakukan, karena sudah ditetapkan pada fungsi penginputan software Mathematica 8.0. seperti dengan cara penginputan secara manual dilakukan juga secara program memasukkan rumus untuk menentukan jumlah baris, kolom, dan diagonalnya. Dan didapatkan solusi dari bilangan *Magic* tersebut.

BAB V

PENUTUP

A. *Kesimpulan*

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan solusi sistem persamaan linear (SPL) yaitu menghasilkan beberapa bilangan *Magic Square* pada ordo 7×7 adalah sebagai berikut $a_{1,1} = 30;\ a_{1,2} = 39;\ a_{13} = 48; a_{1,4} = 1; a_{1,5} = 10; a_{1,6} = 19; a_{1,7} = 28; a_{2,1} = 38; a_{2,2} = 47; a_{2,4} = 9; a_{2,6} = 27; a_{3,1} = 46\ ; a_{4,1} = 5; a_{5,1} = 13; a_{6,1} = 21; a_{7,1} = 22.$
2. Penyelesaian *Magic Square* dengan menggunakan solusi sistem persaaman linear (SPL) menggunakan software Mathematica 8.0 menghasilkan bilangan *Magic* untuk ordo 7×7 adalah sebagai berikut.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

B. *Saran*

Magic Square dapat diselesaikan menggunakan metode sistem persamaan linear (SPL). Saran selanjutnya harus menggunakan metode lain untuk menghasilkan bilangan *Magic Square* dan solusi terhadap *Magic Square* pada prinsip Sistem persamaan linear (SPL).

DAFTAR PUSTAKA

Afidah,dkk, Matematika Dasar, Jakarta : PT.Raja Grafindo Persada, 2014.

Agama, Departemen RI, *Al-Qur'an dan terjemahan*, Bandung : PT.Sygma Examedia Arkanleema, 2009.

Aliviana, Rosy, dkk. "Analisis Matematik terhadap Azimat Numerik*", Jurnal CAUCHY* – ISSN: 2086-0382 vol. 2 (Mei 2012). (Diaskes 10 Januari 2015).

Anton, Horward, dkk, *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan,* Jakarta : Erlangga, 2012.

Dewi, Novi Rustiana, dkk, Kajian Struktur Aljabar Grup pada Himpunan Matriks yang Invertibel, Vol 14 No. 1(A) 14101, Januari 2011.(Diaskes 20 Februari 2015).

Gozali, Sumanang Muhtar, *Aljabar Linear,* Bandung : UPI Bandung press, 2010.

Hadley, G, *Aljabar Linear Edisi Revisi,* Jakarta : Erlangga, 1983.

Jain, *The book of Magic Square,* Vol 3,No. 2000. (Diaskes 07 Januari 2015).

Kartono, *Aljabar linear, Vektor dan Eksplorasinya dengan Maple*, Yogyakarta : Graha Ilmu, 2005.

Kusmawati, Ririen, *Aljabar Linear dan Matriks,* Malang : UIN Malang Press, 2009.

Mahmud, *Aljabar Linier Elementer,* Bandung : Sekolah Tinggi Teknolgi Telkom Press, 2002.

Maslen, Sibarani, *Aljabar Linear*, Jakarta: PT Raja Grafindo Persada, 2014.

Saefuddin, Abdul Aziz, *Aljabar Matriks*, Yogyakarta : Graha Ilmu, 2014.

Santi, Rina Candra Noor, " Implementasi Sistem Persamaan Linier menggunakan Metode Aturan Crame" *Jurnal Cramer dan Aplikasi*, Vol 17, no.1 (Januari 2012). (Diaskes 10 Januari 2015).

Shihab, HM.Quraish, *Tafsir Al-Mishbah (Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qu'an)*, Jakarta:Lentera Hati, 2002.

Sibaroni, Yulianti. *Buku Ajar Aljabar Linear*. Bandung: Sekolah Tinggi Teknologi Telkom, 2002.

Siringgo Ringgo, Rismanto Fernandus. *Penyelesian Magic Square sebagai Permasalahan Sistem Persamaan Linear (SPL)*. 2011. (Diaskes 20 Desember 2014).

Rofii, Moh. *Kotak Ibrahim. (Cara Membuat Rajah, Wifik, Azimat, Magic Square dan Sulap Angka)*,2014. (Diaskes 17 April 2015).

Purwanto, Heri, dkk, *Matematika Diskrit*, Jakarta: PT.Ercontara Rajawali, 2006.

RIWAYAT HIDUP

SRI HIDAYATI dilahirkan di UJUNG PANDANG pada tanggal 21 Mei 1993. Penulis merupakan anak pertama dari empat bersaudara. Anak dari ayahanda H.Mansyur Mahmud dan Ibunda Hj.Darniati.S.Pd, M.A. Penulis memulai pendidikan jenjang sekolah Dasar di SDN BONTOCINDE pada tahun 1999 dan lulus pada tahun 2005. Pada tahun 2005, penulis melanjutkan studi jenjang Sekolah Menengah Pertama di SMP NEGERI 2 SUNGGUMINASA dan lulus pada tahun 2008. Selanjutnya pada tahun yang sama, penulis melanjutkan jenjang Sekolah Menengah Atas di SMA. YAPIP SUNGGUMINASA dan lulus pada tahun 2011. Pada tahun yang sama penulis melanjutkan studi jenjang S-1 di Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin Makassar pada Fakultas Sains dan Teknologi dan menyelesaikan studi pada tahun 2015.